

Chaînes de Markov cachées multivariées à bruit corrélé non gaussien, avec applications à la segmentation du signal radar

N. BRUNEL^{1,*}, W. PIECZYNSKI¹, F. BARBARESCO²

¹CITI, GET/INT, 9, rue Charles Fourier, 91011 Evry cedex, France.

²Thales Air Defence, 9, rue des Mathurins, 92223 Bagneux, France

Email: nicolas.brunel@int-evry.fr, wojciech.pieczynski@int-evry.fr, frederic.barbaresco@fr.thalesgroup.com

Résumé – Nous proposons un modèle de signal multivarié, corrélé temporellement et spectralement, adapté à la modélisation du signal Radar. Le modèle proposé est une chaîne de Markov cachée telle que la loi des observations appartienne à la famille des SIRV et dont la corrélation temporelle de la texture est décrite au moyen d'une copule. Il demeure alors possible d'estimer les paramètres de la loi des observations, et nous étudions la robustesse de cette estimation en faisant varier le type et la force de la dépendance temporelle en utilisant différentes familles de copules. Finalement, nous explorons l'influence de la non prise en compte de cette dépendance dans les procédures de segmentation statistique des signaux Radar fondées sur des chaînes de Markov cachées.

Abstract – We propose a multivariate signal model with temporal and spectral dependence, well-fitted for the modeling of Radar signals. The proposed model is a Hidden Markov Chain for which observations are Spherically Invariant Random Vectors (SIRV), and temporal correlation is described by a copula. It is still possible to estimate the parameters of the SIRV, and we study the robustness of the estimation under different kinds of copulas and various strength of dependence. Finally, we explore the influence of an omitted dependence for statistical segmentation of Radar signals based on Hidden Markov Chains.

1. Introduction

Nous traitons dans cet article de la modélisation et du traitement des signaux multivariés, non gaussiens, corrélés temporellement et spectralement. Le caractère non gaussien des signaux en radar a motivé l'introduction de la loi K et de ses variantes pour la modélisation des intensités [1, 7], ou encore des «Spherically Invariant Random Vector» (SIRV) qui en sont l'extension pour les signaux multidimensionnels [16, 8]. Cette approche permet une représentation statistiquement correcte des signaux Radar effectivement mesurés [6], et reste suffisamment proche du modèle gaussien pour en permettre des interprétations simples tout en palliant les problèmes de robustesse de l'estimation et une décroissance trop rapide des queues de distribution. Les signaux reçus en Radar sont généralement dépendants selon l'axe distance, et plusieurs approches ont déjà été proposées pour décrire cette dépendance [12]. L'objectif est ici de proposer une famille de processus stochastiques qui permette de décrire simultanément ces deux caractéristiques : des marges appartenant à la famille des SIRV et dont les matrices de covariance représentent la corrélation spectrale, et une dépendance temporelle (ou spatiale). Nous nous intéressons principalement à cette dernière propriété que nous introduisons par le biais des copules [10, 14], outil statistique encore peu utilisé en traitement du signal (voir cependant [3]). Nous abordons alors l'influence de cette dépendance dans le contexte de la segmentation, laquelle est souvent fondée sur des modèles de Markov cachés dans lesquelles l'hypothèse d'indépendance des observations (conditionnellement aux classes recherchées) est faite. Nous rappelons dans la section suivante les définitions et propriétés des SIRV et des copules. Nous montrons ensuite comment celles-ci permettent de construire le modèle proposé. Nous

utilisons alors ce dernier pour proposer un modèle triplet [15] afin de simuler des observations ne respectant pas les hypothèses d'indépendance des modèles « Hidden Markov Chain » (HMC). En variant le type de la copule et la force de la dépendance, nous expérimentons l'influence de cette dépendance dans la procédure d'estimation et de segmentation. Nous en tirons alors des conclusions quant à la robustesse et à la fiabilité des procédures de segmentation non-supervisée dans le traitement du signal radar, et de manière plus générale pour des processus stationnaires.

2. SIRV dépendants

2.1 Modèle SIRV et notations

Un vecteur aléatoire $Z \in \mathbb{R}^M$ est appelé SIRV si s'écrit :

$$Z = U^{-1/2} \varepsilon \quad (1)$$

avec ε vecteur gaussien de loi $N(0, \Sigma)$ appelé « speckle » et U variable aléatoire réelle positive, appelée « texture ». La loi de Z est donc un mélange continu de lois gaussiennes centrées. Nous étendons la définition des SIRV telle qu'elle est usuellement donnée en radar au cas où la moyenne de Z peut être non nulle. De telles lois sont dites à contour elliptique ou simplement elliptiques en raison de la forme de leur densité [9]. Les membres de cette famille les plus utilisés dans les applications sont déduits de la loi gamma. Lorsque la variable U suit une loi gamma $\gamma(\nu/2, 2/\nu)$, la loi de Z est une loi de Student (loi T) paramétrée par le triplet (m, Σ, ν) , et si la variable U^{-1} suit une loi gamma $\gamma(a, \frac{1}{a})$, c'est une loi K de paramètre (m, Σ, a) .

La matrice Σ est proportionnelle à la matrice de variance de Z . Les paramètres a, ν règlent la vitesse de décroissance

des queues, et la loi normale apparaît comme un cas limite des lois K et T lorsqu'ils tendent vers l'infini. Les densités s'écrivent

$$\text{Loi T } f(z|\mathbf{m}, \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+M}{2})|\Sigma|^{-1/2} \left(1 + \frac{2p(z)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+M}{2}}}{(\pi\nu)^{M/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \quad (2)$$

$$\text{Loi K } f(z|\mathbf{m}, \Sigma, a) = \frac{2a^a |\Sigma|^{-1/2} \left(\frac{p(z)}{a}\right)^{a-\frac{M}{2}}}{(2\pi)^{M/2} \Gamma(a)} K_{a-\frac{M}{2}}\left(2\sqrt{ap(z)}\right) \quad (3)$$

en écrivant $p(z) = \frac{1}{2}(z-m)'\Sigma^{-1}(z-m)$, et $'$ est l'opérateur de transposition.

2.2 Copules

Une copule de dimension 2 est la fonction de répartition de 2 variables aléatoires uniformes sur le carré $[0,1]^2$, [5, 10, 14]. L'intérêt des copules est qu'elle permettent de faire le lien entre lois jointes et lois marginales (ou marges). Si \tilde{F} est la fonction de répartition (f.d.r) jointe de deux vecteurs aléatoires (V_1, V_2) , de f.d.r F_1, F_2 , nous pouvons affirmer grâce au théorème de Sklar [14] que

$$\tilde{F}(v_1, v_2) = C(F_1(v_1), F_2(v_2)) \quad (4)$$

C est aussi la fonction de répartition du vecteur $(F_1(V_1), F_2(V_2))$. Pour cette raison, la fonction dérivée $c(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(x, y)$ est appelée densité de la copule C . Les copules se généralisent en dimension M quelconque comme les f.d.r de variables à marges uniformes sur l'hypercube $[0,1]^M$. Nous proposons 3 familles différentes de copules paramétriques que nous utiliserons dans les simulations dans la section 4.

Les copules elliptiques sont déduites en inversant la relation de l'Eq. (4) ce qui permet d'obtenir l'expression de la copule (ou de sa densité) pour des familles multivariées connues.

La copule (bivariée) de la loi normale est

$$c(u, v; \rho) = (1-\rho^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}{2}\right) \quad (5)$$

avec $\zeta_1 = \Phi^{-1}(u), \zeta_2 = \Phi^{-1}(v)$, et Φ^{-1} l'inverse de la f.d.r de la loi normale (univariée) centrée et réduite.

La copule de Student a une expression plus complexe

$$c(u_1, \dots, u_M) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\sqrt{1-\rho^2}\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^M} \frac{\left(1 + \frac{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\rho\zeta_1\zeta_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\left(1 + \frac{\zeta_1^2}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\zeta_2^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (6)$$

avec $\zeta_1 = T_v^{-1}(u), \zeta_2 = T_v^{-1}(v)$, et T_v^{-1} l'inverse de la f.d.r de la loi T univariée à ν degrés de liberté. Le paramètre $\rho \in [-1, 1]$ correspond au coefficient de corrélation de la matrice de covariance intervenant dans la définition d'une loi elliptique. Cependant, si ces copules sont utilisées pour définir la loi jointe d'un vecteur V_1, V_2 , ρ ne correspond plus à la corrélation (usuelle) de Pearson entre V_1, V_2 , mais au tau de Kendall τ entre deux variables aléatoires. Les deux mesures de dépendance sont liées par la relation $\tau = 2 \arcsin(\rho) / \pi$.

Les copules archimédiennes constituent une autre famille générique de copules, définie sous la forme fonctionnelle suivante $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$, avec certaines conditions sur la fonction φ (entre autre la positivité et la décroissance sur le segment $[0,1]$). La copule de Clayton est construite avec la fonction $\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$, et vaut

$$C_\alpha(u, v) = \max\left((u^\alpha + v^\alpha - 1)^{-1/\alpha}, 0\right) \quad (7)$$

Le paramètre α peut varier dans $[-1, +\infty) \setminus \{0\}$. Il est relié lui aussi au tau de Kendall par l'expression $\tau = \alpha / (\alpha + 2)$.

La copule gaussienne a la propriété de rendre indépendante les valeurs extrêmes (minimale ou maximale), à la différence de la copule de Student [10]. Pour cette dernière, la présence d'une valeur extrême sur une des composantes « entraîne » une valeur extrême (dans le même sens) pour l'autre variable. Lorsque ces copules sont utilisées pour la modélisation de dépendance de processus spatiaux, elles permettent de reproduire de phénomènes d'agrégation de valeurs extrêmes. La copule de Clayton ne corrèle que les valeurs minimales.

2.3 Modélisation de la dépendance par copule

Soit un processus stationnaire (au sens strict) $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans R^M dont les marges sont elliptiques. Nous proposons de modéliser la dépendance à l'aide de la théorie des copules. Si \mathbf{Y} était à valeurs réelles, il serait possible de décrire tous les processus stationnaires à l'aide d'une copule et de la f.d.r de la loi Y_n , grâce au théorème de Sklar. Cependant une telle construction pose deux difficultés : l'Eq. (4) ne s'étend pas aux vecteurs aléatoires (théorème d'impossibilité, [14]) et la manipulation d'une copule à n arguments pour modéliser la loi de (Y_1, \dots, Y_n) lorsque n est grand pose des problèmes pratiques. Afin de proposer une classe assez large de processus stationnaires à marge SIRV nous introduisons la dépendance par le biais d'un processus scalaire markovien latent. L'hypothèse SIRV permet d'introduire grâce à l'Eq. (1) deux processus $\mathbf{U} = (U_n)_{n \geq 0}, \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_n)_{n \geq 0}$. Nous supposons alors que \mathbf{U} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont des processus indépendants et que le processus speckle $\boldsymbol{\varepsilon}$ est i.i.d, alors que le processus de texture \mathbf{U} est un processus markovien stationnaire (hypothèse similaire à celle faite dans [12]). Pour connaître entièrement sa loi, il suffit de se donner la loi de (U_1, U_2) que nous exprimons en fonction de sa copule C , ses marges étant connues et dépendantes du type de SIRV recherché. L'intérêt de l'utilisation d'une copule pour modéliser le processus \mathbf{U} est double :

- (i) La facilité de construction d'une chaîne de Markov à loi stationnaire fixée de densité g (et fonction de répartition G). Le noyau de transition s'écrit alors $g(u_{n+1})c(G(u_n), G(u_{n+1}))$;
- (ii) La richesse des types de dépendance envisageables grâce aux nombreuses familles de copules existantes (copules elliptiques, archimédiennes).

Nous avons $p(y_n | y_{n-1}, \dots, y_1) \neq p(y_n | y_{n-1})$ parce que le processus (\mathbf{U}, \mathbf{Y}) est une chaîne de Markov Cachée. L'estimation du processus caché \mathbf{U} à partir d'observations y_1, \dots, y_n peut se révéler intéressante dans les applications.

Remarque : Des modélisations similaires ont déjà été introduites en économétrie pour la modélisation des séries temporelles financières dans lesquelles la variance (ou volatilité) est elle-même stochastique [11]. Cependant le plus souvent, il est supposé que le logarithme de la volatilité a une évolution linéaire. Les copules permettent de proposer des dynamiques non-linéaires pour le processus de variance.

3. Estimation des SIRV dépendants

Nous cherchons à estimer les paramètres $(m, \Sigma, \theta = \nu$ ou $a)$ d'un SIRV à partir de la réalisation y_1, \dots, y_N du processus précédent, qui est un échantillon identiquement distribué mais non indépendant. Nous estimons cependant (m, Σ, θ) à partir des équations déterminant l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) dans le cas indépendant. Ceci évite d'avoir à traiter le problème de la maximisation de la log-vraisemblance d'une HMC, nécessitant des procédures complexes souvent coûteuses en temps de calcul [4].

3.1 Estimation

Pour calculer l'EMV d'un SIRV, nous proposons un algorithme EM exploitant le processus de texture \mathbf{U} [13]. La log-vraisemblance complète du processus joint (\mathbf{U}, \mathbf{Y}) dans le cas indépendant se décompose en deux termes, ce qui permet de proposer une procédure de recherche du maximum de la vraisemblance s'opérant par une succession de maximisation sur de petits espaces, au lieu d'une recherche sur de grands espaces ($\theta = a$ ou ν) :

$$\log p(y_1^N, u_1^N | m, \Sigma, \theta) = \sum_{i=1}^N \log(f(y_i | u_i, m, \Sigma)) + \sum_{i=1}^N \log(g_\theta(u_i)) \quad (8)$$

La log-vraisemblance complète de la HMC (\mathbf{U}, \mathbf{Y}) ne diffère que par la présence du terme $\sum_{i=1}^{N-1} \log(c(G_\theta(u_i), G_\theta(u_{i+1})))$ représentant la dépendance entre les observations. Ainsi l'estimation utilisée sous l'hypothèse (fausse) d'indépendance revient à modifier l'algorithme EM correspondant au vrai modèle lors de la mise à jour du paramètre θ . Les formules de ré-estimations dans le cas indépendant sont :

$$m^{(n+1)} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i^{(n)} z_i}{\sum_{i=1}^N w_i^{(n)}} \text{ et } \Sigma^{(n+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^{(n)} (z_i - m^{(n+1)})(z_i - m^{(n+1)})' \quad (9)$$

avec $w_i^{(n)} = E[U_i | z_i, m^{(n)}, \Sigma^{(n)}, \theta^{(n)}]$. Le paramètre de la texture s'obtient par la résolution d'une équation non-linéaire unidimensionnelle dépendant de la densité g_θ que l'on peut écrire sous la forme :

$$\theta^{(n+1)} = \psi(\theta^{(n)}, (w_i^{(n)})_{1 \leq i \leq N}) \quad (10)$$

3.2 Influence de la dépendance

La maximisation de la vraisemblance (8) donne toujours des estimateurs consistants mais dont la variance est plus grande que celle de l'EMV. L'algorithme EM, pour des échantillons de faible taille donne souvent un estimateur biaisé, en raison de maxima locaux de la vraisemblance le piégeant. Dans le cas d'échantillon assez grand ($N = 500$), ce problème est atténué et les tableaux 1 et 2 permettent d'évaluer l'effet de la dépendance sur l'estimation du paramètre de queue (estimés par Monte-Carlo sur 200 tirages). Nous utilisons la racine carrée de l'écart quadratique moyen (REQM) de l'estimateur afin de donner une indication de la fluctuation de l'estimateur, mais aussi de son biais.

Les paramètres (m, Σ) sont correctement estimés, et la variance des estimateurs reste stable et proche du cas indépendant. La différence devient notable pour $\tau = 0.8$. Le paramètre de queue est le plus affecté par la dépendance, ce

TAB. 1 : Moyenne et REQM de l'estimateur du paramètre de queue de la loi T ($\nu = 10$)

τ	0	0.13	0.33	0.59	0.8
Gauss	10.7 (3.2)	11.1 (4.7)	11 (4)	11.5 (4.9)	15.4 (12.8)
Student	10.5 (2.5)	10.6 (2.8)	11.6 (4.8)	11.5 (6.4)	14.7 (12.6)
Clayton	-	11.4 (4.4)	12.5 (8.4)	13.7 (11.1)	23.5 (25)

TAB. 2 : Moyenne et REQM de l'estimateur du paramètre de queue de la loi K ($a = 5$)

τ	0	0.13	0.33	0.59	0.8
Gauss	4.6 (1.1)	4.7 (1.2)	4.6 (1.1)	4.9 (1.5)	5.2 (1.7)
Student	4.7 (1.2)	4.7 (1.1)	4.7 (1.4)	4.8 (1.2)	5.4 (1.9)
Clayton	-	4.7 (1.1)	4.6 (1.1)	4.9 (1.5)	5.7 (2.2)

Lorsque les queues de distribution sont plus épaisses (cas de la loi T par rapport à la loi K considérée) l'influence de la dépendance de la texture est plus importante. La corrélation des extrêmes par la copule de Student ne détériore pas la qualité de l'estimation par rapport à la copule Gaussienne. C'est par contre le type de la structure de la dépendance qui modifie les performances de la segmentation : à même tau de Kendall, la copule Clayton dégrade plus fortement la variance des estimateurs.

4. Segmentation

4.1 Dépendance conditionnelle dans les HMC

Contrairement au cas homogène traité dans la section 2, nous supposons que nous avons plusieurs zones aux caractéristiques différentes, et que celles-ci sont représentables par un processus markovien caché $\mathbf{X} = (X_n)_{n \geq 1}$ à K classes, tel que la loi de Y_n conditionnellement à $X_n = k$ soit une loi elliptique de paramètres $(m_k, \Sigma_k, \theta_k)$. Nous cherchons à estimer de façon non-supervisée le processus \mathbf{X} par l'estimateur bayésien Maximum des Marges a Posteriori (MPM), en supposant que nous avons une chaîne de Markov cachée.

Nous introduisons une dépendance entre les observations, conditionnellement aux états par le biais du processus de texture \mathbf{U} ce qui permet d'évaluer la robustesse (par rapport aux écarts aux hypothèses du modèle) des procédures de segmentation non-supervisée dans le cas où l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des observations est mise en défaut. Cette corrélation spatiale supplémentaire est introduite par une copule c modélisant la dépendance de (U_n, U_{n+1}) , tel que le processus $(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y})$ soit une chaîne de Markov homogène et stationnaire (c'est un cas particulier de chaînes de Markov Triplet). Ce nouveau modèle généralise aussi bien le modèle univarié [3], que le modèle multivarié [2].

4.2 Segmentation non-supervisée avec HMC-IN

Les segmentations sont obtenues sous hypothèse d'indépendance conditionnelle des observations, pour un modèle à 3 classes en dimension 2. Dans l'exemple traité, les moyennes sont $m_1 = (00)'$, $m_2 = (1.5 \ 1.5)'$, $m_3 = (3 \ 3)'$, les variances sont toutes les normalisées, avec des coefficients de corrélation distincts $\rho_1 = 0.4$, $\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 0.5$. Enfin, les paramètres de queue sont $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$, $\nu_3 = 15$ pour les lois T, et $a_1 = 2.5$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7.5$ pour les lois K. Les taux d'erreur se dégradent lentement par rapport au cas indépendant (cas Gauss avec $\tau = 0$), et ne montre un fort écart que dans le cas de tau de Kendall à 0.8. Les écart-types des taux d'erreur restent stables mais deviennent supérieurs au cas indépendant à partir de $\tau \geq 0.59$, indiquant une plus grande variabilité dans la qualité des segmentations non-supervisées, ce qui est particulièrement net dans le cas de la copule de Clayton (pour la loi T et dans une moindre mesure pour la loi K).

TAB. 3 : Taux d'erreur et écart-type en % (loi T)

τ	0	0.13	0.33	0.59	0.8
Gauss	17 (3.4)	17 (3)	17.2 (3)	17.3 (3.9)	17.7 (4.5)
Student	17.5 (3.5)	17.5 (3.4)	17.5 (3.4)	17.6 (4)	18 (4.9)
Clayton	-	17 (3.2)	17 (3.4)	17.9 (4.3)	19.1 (7.7)

TAB. 4 : Taux d'erreur et écart-type en % (loi K)

τ	0	0.13	0.33	0.59	0.8
Gauss	13.9 (2.6)	13.9 (2.9)	13.3 (2.5)	14.1 (2.8)	13.6 (3.1)
Student	13.7 (2.8)	13.7 (2.7)	13.6 (2.7)	14.3 (3.2)	14 (3.3)
Clayton	-	13.7 (2.5)	13.7 (2.6)	13.7 (3.2)	14 (3.5)

5. Conclusion

Le modèle statistique proposé permet de décrire différentes structures de dépendance dans les processus SIRV, souvent utilisés en radar. Le processus (\mathbf{U}, \mathbf{Y}) est une HMC dont l'originalité est l'utilisation des copules pour la modélisation de la dépendance du processus caché, et nous avons présenté plusieurs copules induisant des types de dépendance différents. Une courte étude expérimentale montre que la dépendance dégrade l'estimation des queues de distribution, d'autant plus que celle-ci augmente et que la taille des échantillons est faible. Dans le cadre de la segmentation non-supervisée, nous avons étendu le modèle de chaîne couple (\mathbf{X}, \mathbf{U}) introduit dans [3] au processus triplet $(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y})$ afin d'introduire une dépendance conditionnelle dans les observations. L'influence de cette dernière reste faible lorsque les classes sont bien séparées (notamment par des moyennes distinctes), mais est notable lorsque la dépendance augmente fortement. Une étude plus approfondie nécessite d'être menée lorsque les classes ont des caractéristiques proches (entre autre les moyennes nulles), et pour identifier des familles de copules susceptibles

Références

- [1] R. Barakat. Direct derivation of intensity and phase statistics of speckle produced by a weak scatterer from the random sinusoid model. *J. Opt. Soc. Amer.*, 71(1) :86–90, 1981.
- [2] N. Brunel, W. Pieczynski and S. Derrode, Copulas in vectorial hidden Markov chains for multicomponent image segmentation, ICASSP'05, Philadelphia, USA, March 2005.
- [3] N. Brunel and W. Pieczynski, Unsupervised signal restoration using hidden Markov chains with copulas, *Signal Processing*, 2005 (to be published).
- [4] O. Cappé, E. Moulines and T. Ryden, *Inference in Hidden Markov Models*, Springer-Verlag, 2005.
- [5] X. Chen and Y. Fan. Estimation of copula-based semi-parametric time series models. Technical report, Department of Economics, Vanderbilt University, 2004.
- [6] E. Conte, A. De Maio, and C. Galdi. Statistical validation of the compound-Gaussian model on clutter data from IPIX radar, *Proc. of Toulouse Radar 2004 Conference*, October 2004.
- [7] Y. Delignon and W. Pieczynski. Modeling non-rayleigh speckle distribution in sar images. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 40(6) :1430–1435, 2002.
- [8] F. Gini and M. Greco. Covariance matrix estimation for CFAR detection in correlated heavy tailed clutter. *Signal Processing*, 82(12) :1847–1859, December 2002.
- [9] A.K. Gupta and T. Varga, *Elliptically contoured models in statistics*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publ., 1993.
- [10] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*, volume 73 of Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, 1997.
- [11] S. Kim, N. Shepard and S. Chib, Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparisons with ARCH models, *Review of Economic Studies*, 65, pp. 361-393, 1998.
- [12] P. Lombardo, A. Farina, Coherent radar detection against K-distributed clutter with partially correlated texture, *Signal Processing*, 48, pp. 1-15, 1996.
- [13] G. McLachlan and D. Peel, *Finite Mixture Models*, Wiley, 2000.
- [14] R. B. Nelsen. *An introduction to Copulas*. Number 139 in *Lecture notes in Statistics*. Springer-Verlag, 1998.
- [15] W. Pieczynski, C. Hulard, and T. Veit, Triplet Markov Chains in hidden signal restoration, *SPIE's International Symposium on Remote Sensing*, September 22-27, Crete, Greece, 2002.
- [16] M. Rangaswamy, D. Weiner, and A. Ozturk. Non-Gaussian random vector identification using spherically invariant random process. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 29(1) :111–124, January 1993.

* La thèse de N. Brunel est financée par la Délégation Générale pour l'Armement (DGA/DSP).