PHY4103
Systèmes et fonctions électroniques II

Filtres électroniques

Jose Manuel Rubio Hernán
Email: jose.rubio_hernan@telecom-sudparis.com

Département Électronique et Physique

Plan

Filtrage / filtres

Filtrage : *fonction électronique*

Rôle

- éliminer ou affaiblir les composant de fréquences parasites indésirables
- isoler les signaux d'information de la bande fréquences utiles.

Filtre

Application :

1. **Systèmes de télécommunications**
   - téléphonie, télévision
   - transmission de données (câblé et sans fils)
2. **Alimentation électronique**
   - alimentation à découplage
3. **Systèmes d'acquisition et traitement de signaux physiques**
   - radars
   - mesures des capteurs (médical, industriel, object communicants (IoT)

Fonction de transfert

Le comportement d'un filtre est défini par une fonction de transfert

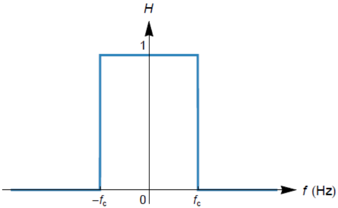
$$H(jw) = \frac{V_s}{V_e} \tag{1}$$

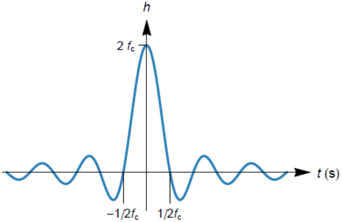
Les 2 grandeurs essentielles sont :

- **Le gain :** $G_{dB} = 20log_{10}|V_s/V_e|$
- **Déphasage :** $\phi = tan^{-1}|V_s/V_e|$

Filtre idéal

- **Caractéristiques**
  1. **Affaiblissement nul** dans la bande passante
  2. **Affaiblissement infini** dans la bande atténuée/rejetée
- **Exemple**





$$H(f) = \begin{cases} 1, & pour\ -f_c < f < f_c \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

$$h(t) \begin{cases} h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{2j\pi f t}\, dt \\ h(t) = \dfrac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \end{cases}$$

Filtre réel

- **Caractéristiques**
  1. **Atténuation minimal** (inferieure à une A_{max}) dans la bande passante
  2. **Atténuation maximal** (supérieure à une A_{min}) dans la bande atténuée/rejetée
- **Le Gabarit** permet approcher le filtre réel de la réponse idéal.

Filtre réel

- **Caractéristiques**
  1. **Atténuation minimal** (inferieure à une A_{max}) dans la bande passante
  2. **Atténuation maximal** (supérieure à une A_{min}) dans la bande atténuée/rejetée
- **Le Gabarit** permet approcher le filtre réel de la réponse idéal.

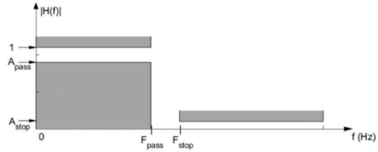
Le gabarit d'un filtre

est le tracé limite de la courbe de la fonction de transfert du filtre.

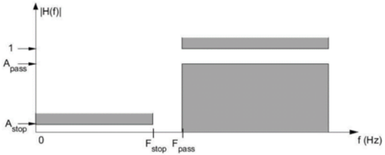
- Le gabarit peut guider le choix de l'utilisateur
- La définition du gabarit ne suffit pas à déterminer les éléments du filtre cherché (A_pass,A_stop,Q)

Gabarit

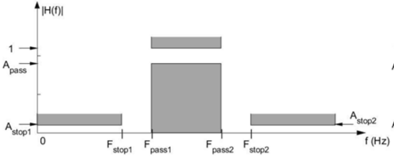
4 familles de filtres



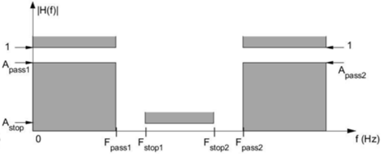
(a) Filtre passe-bas



(b) Filtre passe-haut



(c) Filtre passe-bande



(d) Filtre coupe-bande

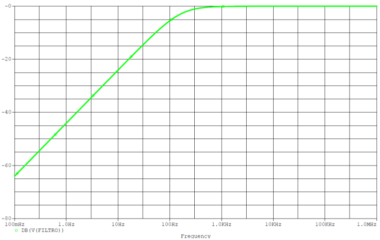
Paramètres d'un filtre

- **Sélectivité (k) :** rapport entre la bande utile et la fréquence f_0
- **Facteur de qualité (Q) :** est une mesure sans unité du taux d'amortissement d'un filtre $Q = 1/2m = 1/B$.
- **Bande relative(B) :** paramètre propre aux filtres passe-bande. La bande relative d'un filtre est l'inverse de son facteur de qualité Q
- **facteur d'ondulation (ϵ) :** caractérise l'ondulation dans la bande passante $\epsilon = \sqrt{10^{A_{maxdB}/10} - 1}$
- **facteur d'amortissement (m)** caractérisant l'évolution et la décroissance au cours du temps des oscillations du filtre $m = 1/2Q$.

	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Coupe-bande
k	$\frac{f_{pass}}{f_{stop}}$	$\frac{f_{stop}}{f_{pass}}$	$\frac{f_{pass2} - f_{pass1}}{f_{stop2} - f_{stop1}}$	$\frac{f_{stop2} - f_{stop1}}{f_{pass2} - f_{pass1}}$
B			$\frac{f_{pass2} - f_{pass1}}{f_0}$	$\frac{f_{stop2} - f_{stop1}}{f_0}$
f_0	f_{pass}	f_{stop}	$\sqrt{f_{pass2} - f_{pass1}}$	$\sqrt{f_{stop2} - f_{stop1}}$

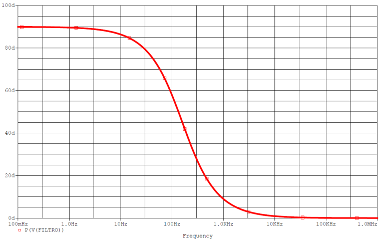
Diagramme de Bode

Diagramme de Gain



$$Gain(dB) = 20log_{10}(|H(jw)|) \quad (2)$$

Diagramme de Phase



$$Phase(^\circ) = arg(|H(jw)|)$$

Temps de propagation (de groupe)

Caractérise le retard apporté par le filtre sur les différents harmoniques du signal d'entrée.

$$\tau = \frac{d\phi}{dw}$$

Le temps de propagation de groupe mesure la déformation du signal a la sortie par rapport à l'entrée

- **Filtre idéal :** $\tau = cte$ dans toute la bande passante
- **Filtre réel :** compromis entre la courbe de réponse d'amplitude et le temps de propagation de groupe.

Différents types de filtres

2 familles de filtres : Numériques et analogiques

Numériques :

- DSP : intégrables, souples et performants
- algorithmes mathématiques
- essentiellement virtuels
- pas de sélection de composants
- pas de dégradation avec le temps
- signal d'entrée numérique CAN
- plus couteux et complexes

Analogiques :

1. **Les filtres passifs**
   - Éléments passifs (R,C,L)
2. **Les filtres actifs**
   - Éléments passifs (R,C)
   - Éléments actifs (Transistors, ALI)

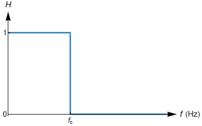
Filtres actifs :

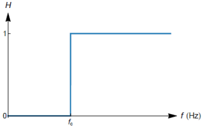
- moins coûteux et moins encombrants
- plus faciles à designer
- plus de consommation : alimentation composant actifs

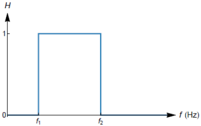
Différents types de filtres

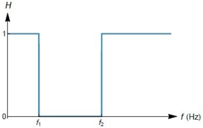
	Filtres passifs	Filtres actifs	Filtres actifs à capacité commutée
Composants	Circuits R, C, L Composant piézoélectriques (quartz)	Transistors, ALI, Circuits R, C	Transistors, ALI, Interrupteur commandé MOS, R, C intégrés
Stabilité	Toujours stables	Ils peuvent être instables	Ils peuvent être instables
Utilisation	Très bas et très haut fréquences	Basses et moyennes fréquences ALI (~10HZ à 1MHz) TRT (~10HZ à 10MHz)	Basses et moyennes fréquences ALI (~10HZ à 1MHz) TRT (~10HZ à 10MHz)
Alimentation	Non	Oui	Oui
Influence	Sensibles à l'impédance de la source et de la charge	Peu sensibles à l'impédance de la source et de la charge	Peu sensibles à l'impédance de la source et de la charge
Autres spécificités	Non intégrables	Intégrables	Intégrables Fréquence programmable

Familles de filtres suivant le type de réponse









Différents types de filtres

Pour désigner un filtre :

- Définir un gabarit
- Choisir une fonction de transfert (critères du gabarit)

Propriétés à prendre en compte :

- **Ordre :** composants du filtre. ordre élevé, coupure plus raide, plus de complexité
- **Raideur de coupure :** relation avec la sélectivité et Q.
- **Réponse temporelle :** le temps de réponse du filtre et le dépassement de la réponse indicielle.
- **Ondulation dans la bande passante (passband ripple) :**
- **Distorsion de phase dans la bande passante :** pas de déformation dans la bande passante, $\tau = cte$.

Fonctions de transfert du 1er et 2nd ordre

Type de filtre	Fonctions de transfert du 1er ordre	Fonctions de transfert du 2nd ordre
Passe-bas	$H(w) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{w}{w_0}}$	$H(w) = \dfrac{1}{1 + 2jm\dfrac{w}{w_0} + \left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}$
Passe-haut	$H(w) = \dfrac{j\dfrac{w}{w_0}}{1 + j\dfrac{w}{w_0}}$	$H(w) = \dfrac{\left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}{1 + 2jm\dfrac{w}{w_0} + \left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}$
Passe-bande	$H(w) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{w}{w_0} - \dfrac{w_0}{w}\right)}$	$H(w) = \dfrac{2jm\dfrac{w}{w_0}}{1 + 2jm\dfrac{w}{w_0} + \left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}$
Coupe-bande	$H(w) = \dfrac{\dfrac{w^2}{w_0^2} + w_0^2}{\dfrac{w^2}{w_0^2} + w_c\dfrac{w}{w_0} + w_0^2}$	$H(w) = \dfrac{1 + \left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}{1 + 2jm\dfrac{w}{w_0} + \left(j\dfrac{w}{w_0}\right)^2}$

Prototype passe-bas

Objectif : ramener tous les filtres précédemment énoncés et ses gabarits à un filtre passe-bas, *prototype passe-bas*.

Important

- Indépendant de la fréquence
- Défini par trois paramètres : A_{pass}, A_{stop}, et k.

Fréquence normalisée f_n.

Variable complexe de Laplace normalisée : $s = \frac{jw}{w_n} = \frac{jf}{f_n} = jx$

Variable	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande	Coupe-bande
s	$s = j\frac{w}{w_n}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{B}\left(s+\frac{1}{s}\right)$	$\frac{1}{B}\left(s+\frac{1}{s}\right)^{-1}$
x	$x = [s]$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{B}\left[x+\frac{1}{x}\right]$	$\frac{1}{B}\left[x+\frac{1}{x}\right]^{-1}$

Les différentes formes de réponses

La fonction de transfert choisi fixera les propriétés physiques de notre filtre.

Il y a deux grandes catégories de filtres :

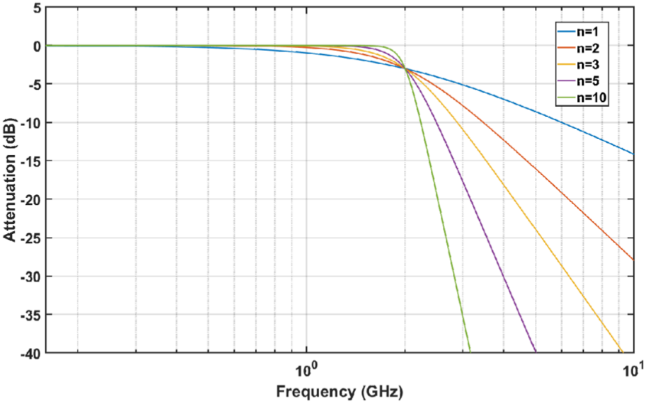
- **Filtres polynomiaux :** la fonction de transfert de ces filtres est un polynôme. Exemples : Butterworth, Chebycheff, Legendre, Bessel.

$$H(w) = \frac{N(w)}{D(w)} = \frac{K}{(p-p_0)(p-p_1)\dots(p-p_n))} \tag{2}$$

  Pour calculer H(p) il y a 2 méthodologies :
  - Par calcul de pôles (ex : Butterxorth)
  - Par récurrence (ex : Chebycheff ou Bessel)

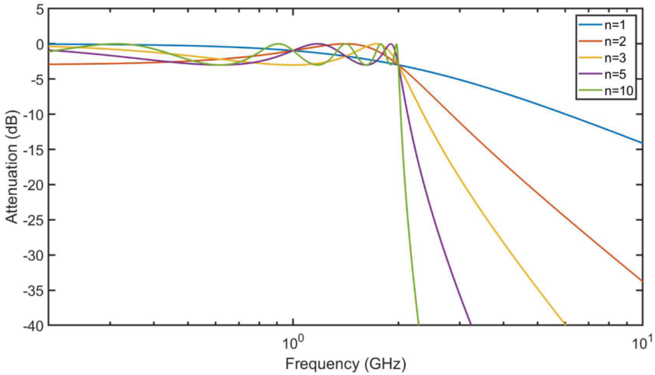
- **Filtres elliptiques :** Ils présentent des zéros de transmission à des fréquences finis. Exemple : Cauer.

La réponse de Butterworth ou courbe MFn



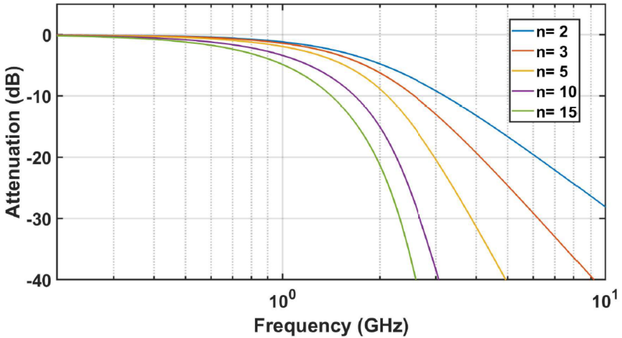
- Réponse en amplitude monotone bande passante (Maximally-flat)
- Ordre élevé, coupure plus raide

La réponse de Chebychev



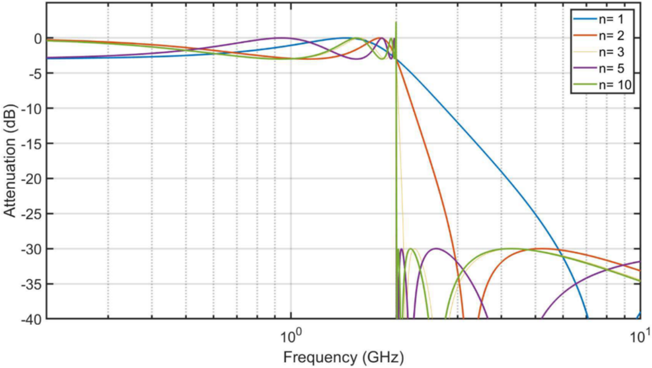
- Coupure plus raide dans la bande atténuée
- Ondulations dans la bande passante (equal ripple)
- Temps de propagation de groupe irrégulier

Les fonctions de Bessel (ou Thompson)



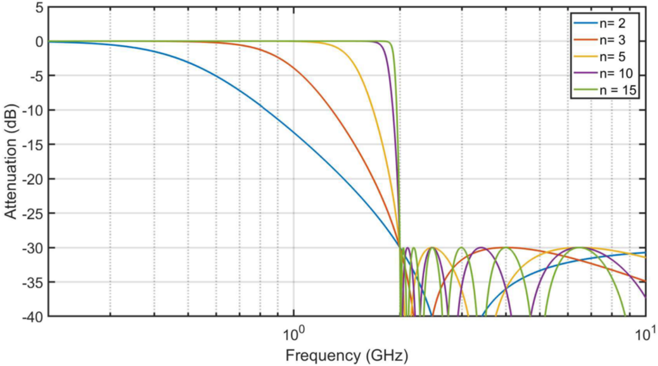
- Réponse dans la bande passante sans ondulation
- Coupure dans la bande atténuée très peu raide
- Déphasage linéaire en fonction de la fréquence, ($\tau = cte$)
  Distorsion minimale sur les signaux non sinusoïdaux
- Modulations HF haut débit modernes (PSK, 8-PSK, OFDM. . .)

La réponse de Cauer (ou elliptique)



- Excellente sélectivité
- temps de propagation de groupe très irrégulier
- Ondulations en bandes passante et atténuée
- Télécommunication (sélectivité)

La réponse de Tchebychev inverse

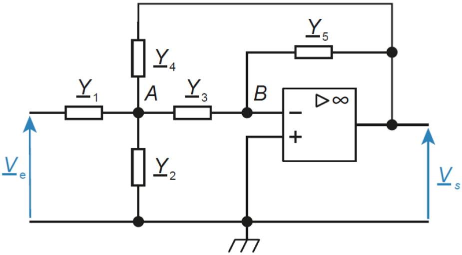


- Réponse : meilleurs compromis entre raideur de coupure et régularité du τ en bande passante
- Méplat en bande passante
- Systèmes d'instrumentation

Comparaison

	Butterworth	Tchebychev	Bessel	Cauer	Tchebychev inverse
Type	Polynomial	Polynomial	Polynomial	Non polynomial	Non polynomial
Bande passante	Plate	Ondulée	Plate	Ondulée	Plate
Bande atténuée	Monotone	Monotone	Ondulée	Ondulée	Ondulée
Sélectivité (pour un n donnée)	Moyenne	Bonne	Faible	Excellente	Bonne
Linéarité de la phase (temps de propagation de groupe)	Bonne	Faible	Excellente	Faible	Bonne
Conception (simplicité)	Aisée	Moyenne	Complexe	Complexe	Complexe

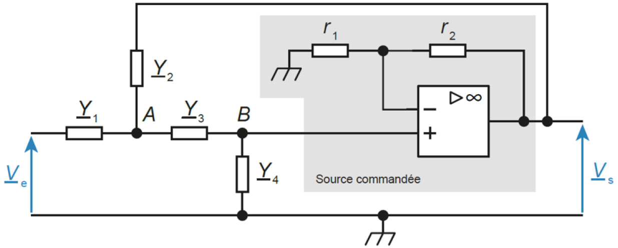
Structures électriques : cellule de Rauch



- Filtres à contre-réaction multiple
- Fonction de transfert :

$$H(w) = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

Structures électriques : cellule de Sallen-key



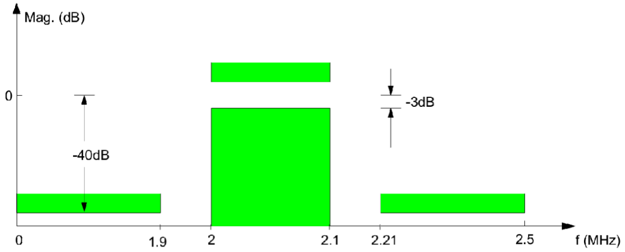
- Filtres à source commandée
- Fonction de transfert :

$$H(w) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{KY_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3(Y_4 - KY_2)}$$

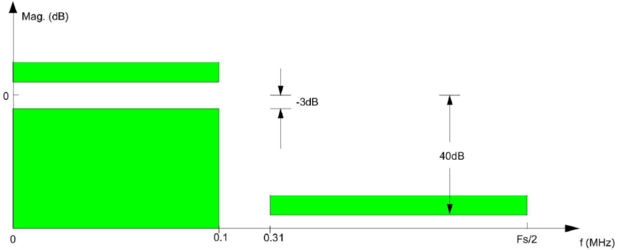
$K = \frac{V_s}{V_B} = 1 + \frac{r_2}{r_1}$: gain en tension de la source commandée

Exercice 1

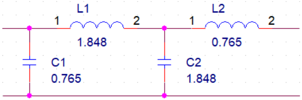
Le signal issu d'un synthétiseur de fréquence a une fréquence comprise entre 2 et 2,1 MHz, il est mélangé a des signaux parasites dont les fréquences varient entre 1,7 et 1,9 MHz et entre 2.3 et 2,5 MHz. Construire un filtre de type Butterworth atténuant d'au moins 40dB les signaux parasites tout en atténuant pas le signal utile de plus de 3dB.



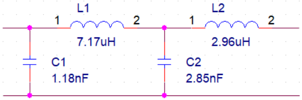
Solution exercice 1



Gabarit du prototype passe-bas

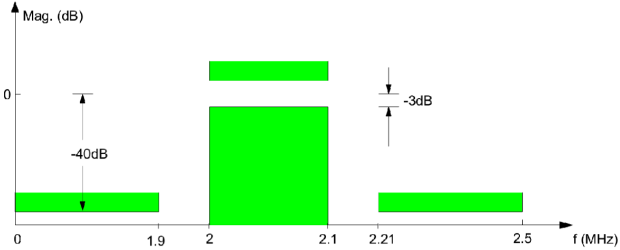


Filtre Butterworth du quatrième ordre en unités normalisées

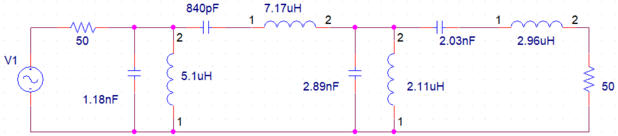


Filtre Butterworth du quatrième ordre réel

Solution exercice 1



Gabarit du filtre passe-bande



Filtre passe bande du type Butterworth