THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PRÉSENTÉE PAR

Habti ABEIDA

EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

SUJET :

IMAGERIE D'ANTENNE POUR SIGNAUX NON CIRCULAIRES : BORNES DE PERFORMANCE ET ALGORITHMES

soutenue le 27 novembre 2006

devant le jury composé de :

Rapporteurs	**Pierre COMON**	**Université de Nice-Sophia Antipolis**
	Martin HAARDT	**Ilmenau University of Technology**
Directeurs de thèse	**Paul DEHEUVELS**	**Université Paris 6**
	Jean Pierre DELMAS	**INT**
Examinateurs	**Pascal CHEVALIER**	**THALES Communications**
	Daniel PIERRE-LOTI-VIAUD	**Université Paris 6**
Invité	**Claude ADNET**	**THALES Air Defence**

Summary

In antenna array processing, the second-order algorithms of estimation of direction of arrival (DOA) of narrowband signals proposed and analyzed in the literature use in general the first covariance matrix $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ only. In the case of rectilinear modulations or modulations obtained after simple operation of derotation such as the BPSK or MSK and GMSK respectively, the received signals are non circular to the second-order. Consequently, the joint use of this first covariance matrix and of $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$, should make it possible to obtain better performances.

The general objective of this thesis is to devise, to evaluate the statistical performance of second-order DOA estimation algorithms by exploiting the non circularity property of signals and fix some benchmark bounds. In this general framework, our study has dealt with the main following points:

- design and study of the statistical performance of second-order subspace-based algorithms for DOA estimation of non circular complex signals corrupted by additive white circular complex Gaussian noise field.
- prove closed-form expressions of the stochastic Cramer Rao bound for the DOA parameter alone for non circular complex Gaussian signals under different noise spatial correlation model.
- prove closed-form expressions of the stochastic Cramer Rao bound for the DOA parameter alone of BPSK, MSK and QPSK modulated signals in the case of additive white uniform or nonuniform circular complex Gaussian noise. Expressions of limits of resolution were compared with those of the Gaussian case.
- extension of the standard results on AMV estimator to real or complex statistics whose first asymptotic covariance matrix is singular. Application to the statistics derived from various estimates of orthogonal projectors associated with noise subspaces.
- finally, study of efficiency of AMV estimators based on estimated orthogonal projectors statistics associated with noise subspaces of the general Gaussian model $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$ where the parameter Θ is supposed to be identifiable from various orthogonal projectors.

Résumé

En traitement d'antenne, les algorithmes du second ordre d'estimation de direction d'arrivée (DOA) de signaux sources bande étroites proposés et analysés dans la littérature n'utilisent en général que la première matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$. Dans le cas de modulations rectilignes telles que la BPSK ou s'y ramenant par dérotation comme la MSK ou la GMSK, les signaux reçus sont complexes non circulaires au second ordre. En conséquence, l'utilisation conjointe de cette première matrice de covariance et de $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ devrait permettre d'obtenir de meilleures performances.

L'objectif général de cette thèse est de concevoir des algorithmes du second ordre d'estimation de DOA en exploitant la propriété de non circularité des signaux sources, d'en évaluer les performances statistiques et d'en fixer des bornes de référence. Dans ce cadre général, notre contribution a porté principalement sur les points suivants :

- la conception et l'étude des performances statistiques d'algorithmes du second ordre de type sous espace dans le cas de sources complexes non circulaires affectées par un bruit additif blanc uniforme gaussien complexe circulaire.
- le calcul d'expressions analytiques interprétables de la borne de Cramer Rao stochastique du paramètre de DOA seul de signaux gaussiens complexes non circulaires sous différents modèles de corrélations spatiales de bruits gaussiens complexes circulaires.
- le calcul d'expressions analytiques interprétables de la borne de Cramer Rao stochastique du paramètre de DOA seul pour des signaux de modulations BPSK, MSK et QPSK dans le cas de bruit additif blanc uniforme ou non uniforme gaussien complexe circulaire. Des expressions de limites de résolution ont été comparées à celles du cas gaussien.
- l'extension des résultats standards sur l'estimateur asymptotiquement de variance minimale (AMV) au cas singulier (première matrice de covariance singulière). Application à des statistiques composées de différents projecteurs orthogonaux estimés associés à différents sous espaces bruit.
- l'efficacité enfin des estimateurs AMV basés sur des statistiques formées par des projecteurs orthogonaux estimés associés à des sous espaces du modèle gaussien général $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$ où le paramètre Θ est identifiable par différents projecteurs orthogonaux.

À mes parents.

Avant-propos

Le présent rapport récapitule les travaux entrepris par son auteur dans le cadre de sa préparation du Doctorat de l'*Université Pierre et Marie Curie, Paris VI*, commencée en nouvember 2002 au sein du *Département Communication, Image et Traitement de l'Information* de l'*Institut National des Télécommunications* sous l'encadrement de Mrs Paul Deheuvels et Jean-Pierre Delmas.

Habti ABEIDA,
Evry, le 4 Juillet 2006.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier toute ma famille qui a supporté toutes les difficultés morales et matérielles pour me soutenir tout au long de mes études supérieures et à laquelle je dédie ce travail de thèse.

Je remercie vivement Monsieur Paul Deheuvels, professeur et directeur du laboratoire LSTA de l'université Pierre et Marie Curie-Paris VI qui m'a fait l'honneur d'être mon directeur de thèse administratif.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur Jean Pierre Delmas, professeur et directeur adjoint du laboratoire UMR CNRS Samovar de l'institut national de télécommunications, d'avoir consacré une large partie de son temps à m'encadrer, me soutenir et me guider avec enthousiasme et exigence tout au long de mon travail, ce qui ma permis de progresser rapidement et efficacement.

J'aimerai également remercier Monsieur Pierre Comon, professeur à l'université Sophia-Antipolis et directeur de recherche au CNRS et Monsieur Martin Haardt, professeur à l'université Ilmenau University of Technology-Germany, qui m'ont fait l'honneur d'accepter et de donner leur temps pour rapporter cette thèse avec rigueur et je teins à préciser que leurs remarques ont contribué à améliorer la qualité de ce rapport. Je remercie Monsieur Daniel Pierre-Loti-Viaud, professeur à l'université Pierre et Marie Curie-Paris VI, et Monsieur Pascal Chevalier, de Thales Communications, ainsi que Monsieur Claude Adnet, de Thales air défense, d'avoir bien voulu accepter d'être membres de ce jury.

Je tiens à remercier l'ancien directeur du département CITI Monsieur Philip A. Regalia, professeur à l'Université catholique de Washington, pour ses conseils et l'aide financière qu'il ma apporté pendant mon travail de thèse. Mes remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants, chercheurs du département Communications, Images et Traitement de l'Information pour leur amitié et leur aide.

Mes pensées s'adressent aussi à tous mes amis, Hassan, Jamal, Marc, Boujemaa, Dalila, ... Je garderai un agréable souvenir de leur compagnie et de leur humour.

Table des matières

1 Notations et abréviations **23**
1.1 Propriétés des opérateurs algébriques 25

2 Introduction **27**
2.1 Résumé étendu 27
2.2 Publications de l'auteur 31

3 Signaux non circulaires **35**
3.1 Introduction 35
3.2 Diverses définitions de la circularité 36
3.2.1 Circularité d'une variable aléatoire scalaire 36
3.2.2 Circularité marginale d'un vecteur aléatoire 37
3.2.3 Circularité faible d'un vecteur aléatoire 37
3.2.4 Circularité forte d'un vecteur aléatoire 37
3.2.5 Circularité totale d'un vecteur aléatoire 38
3.2.6 Circularité au sens des moments 38
3.3 Contrôle de la non circularité 38
3.3.1 Relation entre taux de non circularité et coefficient de corrélation . . 39
3.3.2 Estimation du taux de non circularité 40
3.4 Propriétés générales des vecteurs non circulaires au second ordre 42
3.5 Modulations non circulaires filtrées 44
3.5.1 Filtrage des modulations non circulaires au second ordre 44
3.5.2 Contrôle du taux de non circularité 44
3.6 Exemples de modulations non circulaires au second ordre 45
3.6.1 Modulation non circulaire sans prétraitement de dérotation 45
3.6.2 Modulation non circulaire avec prétraitement de dérotation 45

4 Algorithmes du second ordre sous espaces non circulaires **49**
4.1 Introduction 49
4.2 Définitions et formulation du problème 51
4.3 Algorithmes subspace fitting et ESPRIT 52
4.3.1 Algorithme subspace fitting 52

4.3.2 Algorithme ESPRIT 52
4.4 Algorithmes sous espaces basés sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ ou sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ 53
4.4.1 MUSIC et root-MUSIC basés seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ 54
4.4.2 MUSIC basé seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ 54
4.5 Algorithmes sous espaces basés sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ 54
4.5.1 Cas 1 : sources non corrélées de non circularité maximale 57
4.5.2 Cas 2 : sources non corrélées ou non de non circularité non maximale 60
4.6 Analyse des performances asymptotiques 61
4.6.1 Résultats généraux 61
4.6.2 Borne asymptotique de variance minimale 62
4.6.3 Algorithmes sous espaces basés seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ ou seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ 73
4.6.4 Algorithmes sous espaces basés conjointement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ 74
4.6.4.1 Lois asymptotiques des projecteurs orthogonaux estimés . . 74
4.6.4.2 Lois asymptotiques des DOA estimées 77
4.7 Conclusion 88

Annexes **90**

5 Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux gaussiens non circulaires 101
5.1 Introduction 101
5.2 Borne de Cramer Rao stochastique gaussienne non circulaire 103
5.3 Application à l'estimation de DOA 105
5.4 Identifiabilité des paramètres 106
5.4.1 Diverses définitions de l'identifiabilité 107
5.4.2 Identifiabilité locale 107
5.4.3 Présentation du problème d'identifiabilité non circulaire 108
5.5 CRB stochastique complexe gaussienne non circulaire 109
5.6 Cas de bruit blanc uniforme 110
5.6.1 Estimateur du maximum de vraisemblance stochastique 110
5.6.2 Expressions de la CRB stochastique gaussienne non circulaire 111
5.6.2.1 Approche indirecte 111
5.6.2.2 Approche directe 113
5.6.3 CRB déterministe 113
5.6.4 Cas d'une seule source 114
5.6.5 Comparaisons analytiques des CRB circulaires et non circulaires . . . 115
5.6.6 Comparaisons numériques 116
5.7 Cas de bruit arbitraire inconnu 118
5.7.1 Estimateur du maximum de vraisemblance stochastique 118
5.7.2 Expressions de la CRB stochastique gaussienne non circulaire 119

5.7.3 Approche indirecte 121
5.7.4 Comparaisons des CRB circulaires et non circulaires 122
5.7.5 Cas d'une seule source 125
5.7.6 Comparaisons numériques 126
5.8 Conclusion 129

Annexes **130**

6 Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux discrets **143**
6.1 Introduction 143
6.2 Définitions et formalisation du problème 144
6.3 CRB stochastiques sous bruit blanc uniforme 145
6.3.1 Cas d'une seule source 145
6.3.2 Cas de plusieurs sources 150
6.4 CRB stochastiques sous bruit blanc non uniforme 156
6.4.1 Cas d'une seule source 156
6.4.2 Cas de plusieurs sources 159
6.5 Seuil statistique de résolution 163
6.5.1 Limite de résolution : caractéristique d'un réseau de capteurs 163
6.5.2 La résolution d'un algorithme super résolution 163
6.5.3 Seuil statistique de résolution discret et gaussien 165
6.6 Conclusion 169

Annexes **170**

7 Estimateur asymptotique de variance minimale dans le cas singulier et efficacité **183**
7.1 Introduction 183
7.2 Exemple illustratif 184
7.3 Estimateurs AMV dans le cas singulier 186
7.3.1 Statistique arbitraire 186
7.3.2 Application aux projecteurs 187
7.3.3 Comparaisons avec les travaux génériques existants 189
7.4 Efficacité des estimateurs AMV dans le cas gaussien 190
7.4.1 Modèle d'estimation de DOA 190
7.4.2 Modèle paramétrique général 191
7.5 Conclusion 195

Annexes **196**

8 Conclusions et Perspectives **209**

Table des figures

3.1 Coefficient de corrélation en fonction du taux de non circularité avec $\sigma_X \neq \sigma_Y$ et $\sigma_X = \sigma_Y$. 40

4.1 Localisation de 4 sources non corrélées de taux de non circularité maximale avec l'Alg$_1$ à l'aide d'un réseau linéaire uniforme équidistant de $M = 3$ capteurs avec SNR= $12dB$, $T = 500$, $\sigma^2_{x_k} = 1$ pour $k = 1, \ldots 4$ et $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_2 = \pi/2$, $\phi_3 = \pi/6$ et $\phi_4 = \pi/4$. 59

4.2 Localisation de 4 sources non corrélées de taux de non circularité maximale avec l'Alg$_1$ et l'Alg$_2$ à l'aide d'un réseau circulaire uniforme ($d = \lambda_0/2$) de $M = 3$ capteurs avec SNR= $20dB$, $T = 500$, $\sigma^2_{x_k} = 1$ pour $k = 1, \ldots 4$ et $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_2 = \pi/2$, $\phi_3 = \pi/6$ et $\phi_4 = \pi/4$. 60

4.3 Rapport r'_2 entre la variance $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)$ calculée avec connaissance a priori de non corrélation des 2 sources et la même variance calculée sans connaissance a priori, en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$15dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 71

4.4 Rapport r'_1 entre la variance $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)$ calculée avec connaissance a priori de non corrélation des 2 sources et la même variance calculée sans connaissance a priori, en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$15dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 71

4.5 $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$5dB$, $\Delta\phi = \pi/6rd$ et $\alpha = \pi/2rd$. 72

4.6 $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de α avec SNR=$5dB$, $\Delta\theta = 0.05rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 72

4.7 $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 72

4.8 Variances asymptotiques et estimées (1000 réalisations de Monte Carlo) données par l'algorithme MUSIC standard (—) et l'algorithme 2 (- -) en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour deux valeurs de séparation de phase de non circularité $\Delta\phi$, $M = 6$, SNR= $20dB$ et $T = 500$. 79

4.9 Variances asymptotiques théoriques et estimées données par les algorithmes 1, 2 ,3 et par l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ en fonction du SNR pour $\Delta\theta = 0.05rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 82

4.10 Variances asymptotiques théoriques et estimées données par les algorithmes 1, 2 ,3, MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et par l'approche AMV basée seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ en fonction de séparation angulaire pour un SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. . . 82

4.11 Variances asymptotiques théoriques données par les algorithmes 1, 2 ,3 (1) et par l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ (2) en fonction de séparation de phase de non circularité pour deux valeurs de séparation angulaire et un SNR= $20dB$. 82

4.12 $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\text{Var}^{\text{Alg}_{1,2,3}}(\theta_1)}$ en fonction du SNR pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour $\Delta\phi = \pi/6rd$. 82

4.13 $r_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}^{\text{MUSIC}(R)}(\theta_1)}{\text{Var}^{\text{Alg}_4}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire avec $\alpha = \pi/2$, SNR= $5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 83

4.14 Variances asymptotiques théoriques associées aux algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et l'algorithme MUSIC pondéré (Alg_5) en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de α avec $\Delta\theta = 0.1rd$ et SNR= $20dB$. 87

4.15 $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}^{\text{Alg}_5}(\theta_1)}{\text{Var}^{\text{MUSIC}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire avec $\alpha = \pi/2$ et SNR= $5dB$. 87

4.16 $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}^{\text{Alg}_5}(\theta_1)}{\text{Var}^{\text{MUSIC}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour trois valeurs du SNR avec $\alpha = \pi/2$, $\Delta\theta = 0.1rd$. 87

4.17 $r_5 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Var}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\text{Var}^{\text{Alg}_5}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs du SNR avec $\alpha = \pi/2$, $\Delta\theta = 0.1rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 87

5.1 $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité ρ_1 pour plusieurs valeurs du SNR. 115

5.2 $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction du taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 117

5.3 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ normalisée en fonction de la séparation de phase de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire, $\rho = 1$ et SNR= $20dB$. 117

5.4 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction de la séparation angulaire pour deux valeurs de SNR, $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 117

5.5 $r_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{C}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 117

5.6 $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour différentes valeurs de SNR pour un réseau linéaire uniforme de M capteurs. 126

5.7 $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction du ζ avec les modèles 1 et 2 avec $\Delta\theta = 0.1rd$, $\rho = 1$, SNR= $0dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 127

5.8 $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction du SNR pour différentes valeurs de séparation angulaire avec $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 128

5.9 $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction du taux de non circularité pour différentes valeurs de séparation angulaire avec SNR= $-5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 128

5.10 $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de séparation angulaire pour différentes valeurs du SNR avec $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$. 128

6.1 Rapports $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BP(M)SK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ et $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de $\rho_{u,1}$. 147

6.2 Rapports $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BP(M)SK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ exact (1) donné par (6.3.6) et approximé donné par (6.3.8), $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ exact (1) donné par (6.3.7) et approximé (2) donné par (6.3.9) pour des faibles valeurs de $\rho_{u,1}$. 148

6.3 CRB normalisées ($T = 1$) associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK : $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BP(M)SK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{DA}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U,CO}}^{\text{BP(M)SK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U,CO}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour un réseau linéaire uniforme de M capteurs. . . 150

6.4 Valeurs approximées et exactes (avec $T' = 10000$) des $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour deux valeurs de M et de la séparation angulaire $\Delta\theta$ avec $\Delta\phi = 0.1$rd. 153

6.5 $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour plusieurs valeurs d'écart de phase de non circularité $\Delta\phi$ avec $M = 6$ et SNR= $20dB$ 153

6.6 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\text{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$ et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction de la séparation angulaire pour deux valeurs du SNR. 155

6.7 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\text{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (5 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$, $\Delta\theta = 0.3$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR. 155

6.8 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\text{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$, $\Delta\theta = 0.05$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR. 155

6.9 $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\text{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $M = 6$, SNR= $10dB$, $\Delta\theta = 0.05$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction de T. 155

6.10 CRB normalisées ($T = 1$) en fonction de β/σ_n^2. 159

6.11 Valeurs approximées et exactes (obtenues avec $T' = 10000$ et $T = 100$) des $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$,$\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{MSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour deux valeurs de M et de la séparation angulaire avec $\Delta\phi = 0.1$rd. 162

6.12 $r_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour plusieurs valeurs d'écart de phase de non circularité $\Delta\phi$, M=10 et SNR= $20dB$. 162

6.13 $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\text{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations initialisé dans un voisinage des valeurs exactes) pour $T = 500$, $M = 6$ et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR . 162

6.14 Exemples de la moyenne des spectres 165

6.15 Seuil de résolution de SNR associé à l'algorithme MUSIC standard, et seuils statistiques de résolution associés à des sources gaussiennes et à des sources discrètes avec un réseau linéaire uniforme de $M = 6$ capteurs et $T = 100$. 168

6.16 $r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de séparation angulaire pour différentes valeurs du SNR avec $M = 6$ et $\Delta\phi = \phi/6$. 168

7.1 MSE($\mathbf{h}$)=Tr($\mathbf{C}^{\text{AMV}}(\mathbf{h})$) normalisé associé à la modulation BPSK en fonction de la phase α de la racine z_1 pour SNR= $10dB$ et $20dB$ sous deux modèles d'observations indépendantes $(--)$ et non indépendantes $(-)$. 194

7.2 MSE($\mathbf{h}$)=Tr($\mathbf{C}^{\text{AMV}}(\mathbf{h})$) normalisé associé à la modulation MSK en fonction de la phase α de la racine z_1 pour SNR= $10dB$ et $20dB$ sous deux modèles d'observations indépendantes trait $(--)$ et non indépendantes $(-)$. 195

Liste des tableaux

4.1 Variances théoriques et erreur quadratique moyenne estimée donnée par l'algorithme 5 pour $\Delta\theta = 0.2rd$ 88
4.2 Variances théoriques et erreur quadratique moyenne estimée donnée par l'algorithme 5 pour $\Delta\theta = 0.2rd$ and $SNR = 8dB$ 88

Chapitre 1

Notations et abréviations

Dans ce document, nous dénoterons par théorèmes, les résultats de nature bibliographique et par résultats, les contributions de cette thèse. Les matrices sont représentées par des majuscules grasses, les vecteurs par des minuscules grasses (par défaut, sont orientés "colonne") et les scalaires par des minuscules non grasses.

$\|.\|$	:	valeur absolue d'un réel ou le module d'un complexe
$\|\|\mathbf{A}\|\|$	:	norme spectrale de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	:	matrice transposée de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^H$	:	matrice transposée-conjuguée de $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}^*$	:	complexe conjugué de $\mathbf{a}$
$\mathbf{A}^\#$	:	matrice pseudo-inverse de $\mathbf{A}$ au sens de Moore-Penrose
$\mathbf{I}$	:	matrice identité
$\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$	:	trace de la matrice $\mathbf{A}$
$\mathrm{Det}(\mathbf{A})$	:	déterminant de la matrice $\mathbf{A}$
$\Re(.)$	:	partie réelle
$\Im(.)$	:	partie imaginaire
$\mathrm{vec}(\mathbf{A})$	:	vecteur obtenu en "empilant" les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ les unes sous les autres
$\mathrm{v}(\mathbf{A})$	:	vecteur obtenu en "empilant" les colonnes du bloc triangulaire inférieur diagonale principale comprise, de la matrice $\mathbf{A}$ les unes sous les autres
$\mathbf{e}_k$	:	vecteur canonique (1 en position k et 0 ailleurs)
$\mathbf{e}_{K,k}$	:	vecteur canonique (1 en position k et 0 ailleurs) de taille K
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	:	produit de Kronecker, matrice dont le bloc (i, j) est $a_{i,j}\mathbf{B}$
$\mathrm{E}(.)$	:	espérance mathématique
$\mathrm{Cum}(.)$	:	opérateur de cumulant
$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathrm{E}((\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y}))^H)$
$\mathrm{Cov}(\mathbf{x})$	:	$\mathrm{E}((\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))^H)$
$\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$	:	rang de la matrice $\mathbf{A}$
$\mathrm{Imag}(\mathbf{A})$	:	espace vectoriel généré par les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$

$\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$	:	noyau de la matrice $\mathbf{A}$
$o(.)$	:	signifie $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	:	converge en loi
$\xrightarrow{ps}$	:	converge presque sûre
$N_c(0, \mathbf{C}, \mathbf{C}')$	:	loi normale centrée complexe du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ avec
	:	$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))^H)$ et $\mathbf{C}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))^T)$
$N_r(0, \mathbf{C})$	:	loi normale centrée réelle du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ avec
	:	$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathrm{E}(\mathbf{x}))^T)$

Abréviations

AMV	:	Asymptotique de variance minimale
AU	:	Bruit arbitraire
BPSK	:	Binary phase shift keying
CG	:	Gaussien complexe circulaire
CPM	:	Continuous phase modulation
CPFSK	:	Continuous phase frequency shift keying
CRB	:	Borne de Cramer Rao
DET	:	Déterministe
EQM	:	Erreur quadratique moyenne
ESPRIT	:	Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques
FIM	:	Matrice d'information de Fisher
GMS	:	Global system for mobile
GMSK	:	Gaussian minimum shift keying modulation
MSK	:	Minimum shift keying modulation
MV	:	Maximum de vraisemblance
MIMO	:	Multiple-input multiple-output
NCG	:	Gaussien complexe non circulaire
NU	:	Bruit blanc non uniforme
OQPSK	:	Offset quadrature phase shift keying
PAM	:	Phase amplitude modulation
PDF	:	Fonction de densité de probabilité
QAM	:	Quadrature amplitude modulation
QPSK	:	Quadrature phase shift keying
SF	:	Subspace fitting
SISO	:	Single-input single-output
SIMO	:	Single-input multiple-output
SM	:	Subspace matching
SNR	:	Rapport signal sur bruit

U	:	Bruit blanc uniforme
WSF	:	Weighted subspace fitting

1.1 Propriétés des opérateurs algébriques

On utilisera principalement les propriétés suivantes du produit de Kronecker et de la pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose démontrées dans [94, 60] (les dimensions des matrices sont supposées telles que ces expressions aient un sens) :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \tag{1.1.1}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \tag{1.1.2}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{A})\mathrm{Tr}(\mathbf{B}) \tag{1.1.3}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\}^T \mathrm{vec}(\mathbf{B}) \tag{1.1.4}$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{B}) \tag{1.1.5}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ABCD}) = \{\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T)\}^T (\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B})\mathrm{vec}(\mathbf{C}) \tag{1.1.6}$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{ab}^T) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \tag{1.1.7}$$

1. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices $(m \times n)$ avec $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{O}$ et $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{O}$, alors

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\# = \mathbf{A}^\# + \mathbf{B}^\# \tag{1.1.8}$$

2. Soit $\mathbf{A}$ est une matrice $(m \times p)$ et $\mathbf{B}$ est une matrice $(p \times n)$. Si $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{B}) = p$, alors

$$(\mathbf{AB})^\# = \mathbf{B}^\#\mathbf{A}^\# \tag{1.1.9}$$

3.

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\# = \mathbf{A}^\# \otimes \mathbf{B}^\# \tag{1.1.10}$$

4. Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \mathbf{A}^\# = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^\# & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^\# & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_n{}^\# \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

5. Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^{-1} \tag{1.1.12}$$

Matrice de commutation K

$\mathbf{K}$ est la matrice de commutation de dimension $n^2 \times n^2$ où les blocs $\mathbf{K}_{(1:i,1:j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ sont égaux au produit $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T$, vérifie les propriétés suivantes [60] :

$$\mathbf{K}^T\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K}^T = \mathbf{I} \tag{1.1.13}$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{K}\mathrm{vec}(\mathbf{A}) \tag{1.1.14}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{K} \tag{1.1.15}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{A} \tag{1.1.16}$$

$\mathrm{vec}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{K}\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ si $\mathbf{A}$ est une matrice hermitienne.

Matrice de duplication $\mathcal{K}$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice $(n \times n)$. Nous noterons $\mathrm{v}(\mathbf{A})$, le $\frac{n(n+1)}{2} \times 1$ vecteur obtenu en "vectorisant" le bloc triangulaire inférieur de la matrice $\mathbf{A}$, diagonale principale comprise. Si la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique, $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ et $\mathrm{v}(\mathbf{A})$ contiennent les mêmes éléments. Il existe donc une matrice $n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$ unique $\mathcal{K}$, dite matrice de duplication telle que :

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \mathcal{K}\mathrm{v}(\mathbf{A}).$$

Matrice de Permutation J

La matrice $\mathbf{J}$ est définie par :

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

et vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^T &= \mathbf{J} \\ \mathbf{J}^2 &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Introduction

2.1 Résumé étendu

Le traitement d'antenne est un domaine du traitement du signal qui a suscité beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique au cours de ces trois dernières décennies. Le problème de l'estimation de direction d'arrivée (DOA) de sources en particulier, a fait l'objet de nombreuses études qui ont permis notamment l'élaboration de méthodes du second ordre performantes telles que les méthodes dites "haute résolution" comme MUSIC, root-MUSIC, Min-Norm, ESPRIT ou Subspace Fitting (SF) pour ne citer que les plus connues.

De nombreux algorithmes du second ordre d'estimation de paramètres sont appliqués aux signaux reçus après démodulation cohérente, donc en équivalent bande de base et ainsi en général en données complexes. Or les algorithmes du second ordre d'estimation de DOA de signaux sources bandes étroites proposés et analysés dans la littérature n'utilisent en général que la première matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$. Dans le cas de modulations rectilignes ou s'y ramenant telles que respectivement la BPSK ou la MSK, les signaux reçus sont complexes *non circulaires au second ordre* (que nous désignerons simplement dans tout ce document par signaux non circulaires). En conséquence, l'utilisation conjointe de la première matrice de covariance et de $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ devrait permettre d'obtenir de meilleures performances.

Dans ce cadre général, notre contribution a porté sur les points suivants :

- la conception et l'étude des performances d'algorithmes du second ordre de type sous espace d'estimation de DOA de sources complexes non circulaires affectées par un bruit additif blanc gaussien complexe circulaire.
- le calcul d'expressions analytiques interprétables de la borne de Cramer Rao (CRB) stochastique du paramètre de DOA seul de signaux gaussiens complexes non circulaires sous différents modèles de corrélations spatiales de bruits gaussiens complexes circulaires.
- le calcul d'expressions analytiques interprétables de la borne de Cramer Rao stochastique du paramètre de DOA seul pour des signaux de modulations BPSK, MSK et

QPSK dans le cas de bruit additif blanc gaussien complexe circulaire uniforme[1] (appelé quelquefois bruit isotrope dont la matrice de covariance spatiale est proportionnelle à la matrice identité) ou dans le cas de bruit blanc gaussien complexe circulaire de matrice de covariance spatiale diagonale inconnue[2] (appelé quelquefois bruit non isotrope).

- l'extension des résultats standards sur l'estimateur asymptotiquement (au sens du nombre d'observations indépendantes) de variance minimale (AMV) à des statistiques réelles ou complexes dont la première matrice de covariance de sa distribution asymptotique est singulière. Application à des statistiques composées par différents projecteurs orthogonaux estimés associés à des sous espaces bruit du modèle générique non circulaire.
- l'efficacité enfin des estimateurs AMV basés sur des statistiques formées par des projecteurs orthogonaux estimés associés à des sous espaces bruit du modèle général gaussien circulaire ou non circulaire : $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$, où Θ est identifiable à partir de différents projecteurs orthogonaux (par exemple, Θ peut représenter la réponse impulsionnelle d'un canal.)

Plus précisément, ce document est organisé de la façon suivante :

Après avoir précisé dans le **chapitre 2** les notations et quelques abréviations utilisées dans ce document, on rappelle tout d'abord dans le **chapitre 3**, des définitions de circularité des variables ou vecteurs aléatoires complexes ainsi que diverses propriétés statistiques. De plus, nous définissions différents paramètres que nous utiliserons dans ce document, tel que le taux de non circularité d'un signal non circulaire à l'ordre 2 appartenant à l'intervalle $[0,\ 1]$ est égal à 0 pour des signaux circulaires et 1 pour des signaux non circulaires de non circularité maximale comme la BPSK non filtrée. Nous relions ce taux de non circularité au coefficient de corrélation des parties réelles et imaginaires. Nous avons également donné la loi asymptotique d'un estimateur empirique du taux de non circularité. Nous donnons quelques éléments sur le filtrage de signaux non circulaires qui nous permettrons de contrôler le taux de non circularité dans nos simulations. Enfin, nous examinons quelques exemples de signaux non circulaires du second ordre rencontrés en communication numérique.

Le **chapitre 4** est consacré à l'étude des performances statistiques asymptotiques des algorithmes de recherche monodimensionnelle du second ordre d'estimation de DOA de signaux sources bandes étroites complexes non circulaires rencontrés en communication numérique (modulations BPSK ou OQPSK obtenue après dérotation) basés conjointement sur les deux matrices de covariance spatiales $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$. Ces algorithmes sont obtenus en exploitant l'orthogonalité entre le sous espace bruit et les vecteurs directionnels des sources. Il a pour objectif de préciser le gain en performance de diverses méthodes utilisant la seconde matrice de covariance pour améliorer la localisation de sources non circulaires, en les rapportant à des bornes AMV dans le cadre d'estimation du second ordre. Dans ce contexte, nous

[1] appelé dans la suite du document bruit blanc uniforme

[2] appelé dans la suite du document bruit blanc non uniforme

proposons un algorithme de sous espace basé seulement sur la seconde matrice de covariance pour illustrer le rôle de cette matrice. D'autres algorithmes basés conjointement sur les deux matrices de covariance sont considérés dans les deux cas suivants :

- **Cas 1** : signaux sources non corrélés de non circularité maximale, par exemple des modulations rectilignes non filtrées telles que la modulation BPSK ou la modulation OQPSK obtenue après dérotation. Dans ce cas, nous rappelons brièvement les deux algorithmes présentés dans [15, 36] dont les performance n'avaient été étudiées que par simulations avec un réseau linéaire uniforme équidistant et nous proposons un nouvel algorithme qui prolonge l'algorithme root-MUSIC à un réseau de structure quelconque.
- **Cas 2** : signaux sources corrélés ou non corrélés de non circularité non maximale pour lesquels le rang de la matrice de covariance spatiale étendue est plein, par exemple des modulations rectilignes filtrées non corrélées (au sens réel) entre elles. Dans ce cas, nous proposons un nouveau algorithme MUSIC pondéré en s'inspirant d'algorithmes proposés dans [104, 108] dont les performances n'améliorent celles de l'algorithme MUSIC standard que dans le cas de sources non corrélées (au sens réel) de circularité quelconque pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de SNR, où son efficacité (au sens de la borne AMV) décroît dans ces circonstances, mais dont les performances peuvent être quelquefois plus mauvaises que celles de l'algorithme MUSIC standard dans d'autres situations.

Pour étudier les performances asymptotiques de ces algorithmes sous ces deux cas, nous avons besoin d'une borne inférieure sur la matrice de covariance de tout estimateur du second ordre telles que, les bornes de Cramer Rao qui servent habituellement comme références difficiles à calculer sous des connaissances a priori sur les signaux sources. Nous étendons l'expression analytique [22] commune de la variance minimale de tout estimateur du second ordre de DOA de sources complexes gaussiennes ou non, circulaires ou non donnée par la borne AMV démontrée sous l'hypothèse de bruit blanc uniforme au cas de bruit paramétré linéairement. Nous montrons ensuite divers résultats asymptotiques qui permettent d'étudier les performances asymptotiques d'algorithmes arbitraires sous espaces en présence de sources gaussiennes ou non et complexes circulaires ou non, en démontrant des expressions explicites des matrices de covariance asymptotiques, des matrices estimées des projecteurs orthogonaux du modèle standard ou étendu. Grâce à une approche fonctionnelle, nous déduisons les lois asymptotiques gaussiennes des estimées de DOA seul fournies par les algorithmes présentés dans les deux cas précédents, en donnant des expressions explicites des matrices de covariance asymptotiques associées. Nous montrons également diverses propriétés générales de ces matrices de covariance asymptotiques. Dans le cas particulier d'une seule source, nous montrons que les algorithmes présentés dans ces deux cas sont asymptotiquement efficaces, où des expressions explicites des variances asymptotiques de la DOA sont obtenues. Nous montrons sous certaines conditions que les performances asymptotiques des algorithmes du second ordre construits à partir de la première matrice de covariance sont insensibles à la non circularité et à la non gaussienneté des sources, contrairement aux algorithmes sous espaces construits

conjointement à partir des deux matrices de covariance dont les performances asymptotiques dépendent de la non circularité à travers la seconde matrice de covariance de signaux sources. Enfin, des simulations de Monte Carlo montrent le domaine de validité asymptotique de nos résultats théoriques. D'autre part, ces algorithmes sont comparés numériquement entre eux et avec la borne AMV pour évaluer leur efficacité et l'influence de la non circularité dans les deux cas mentionnés précédemment.

Le **chapitre 5** est consacré au calcul de la borne de Cramer Rao stochastique des estimées du paramètre de DOA seul de sources gaussiennes complexes non circulaires, dans le cas de bruit additif blanc gaussien complexe circulaire ou coloré avec matrice de covariance spatiale arbitraire inconnue paramétrée par un vecteur de paramètres identifiables.

Sous différents modèles de bruit, nous montrons que l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) est insensible à la structure par bloc de la matrice de covariance étendue des signaux sources. Grâce à cette propriété, nous démontrons des expressions analytiques explicites de la CRB stochastiques du paramètre de DOA seul, en utilisant une extension de la formule générale de Slepian-Bangs que nous avons établi ou à partir de l'analyse asymptotique de l'estimateur du MV. Dans le cas particulier d'une seule source complexe non circulaire affectée par un bruit additif blanc uniforme ou blanc non uniforme, des expressions interprétables de la CRB stochastiques sont obtenues et comparées aux CRB classiques gaussiennes circulaires. Enfin, ces bornes gaussiennes non circulaires sont comparées analytiquement avec les CRB stochastiques conventionnelles gaussiennes circulaires et avec la CRB déterministe sous différents modèles de bruit.

Le **chapitre 6** est consacré au calcul de la borne de Cramer Rao stochastique du paramètre de DOA seul de signaux de modulations BPSK, MSK et QPSK, dans le cas de bruit blanc uniforme et dans le cas de bruit blanc non uniforme.

Dans le cas d'une seule source affectée par un bruit blanc uniforme, nous démontrons des expressions analytiques de la CRB stochastique grâce au découplage entre les paramètres puissance et les paramètres de phase de la matrice d'information de Fisher. Ces bornes sont comparées analytiquement, d'une part, avec différentes CRB dérivées selon diverses connaissances a priori sur les signaux sources ou sur les paramètres, d'autre part, avec des CRB gaussiennes complexes circulaires ou non circulaires et avec la CRB déterministe. Ces expressions interprétables nous permettent de démontrer que les CRB associées à la modulation BPSK et MSK [resp. QPSK] sont inférieures aux CRB gaussiennes complexes non circulaires [resp. complexes circulaires].

Ces résultats et comparaisons sont ensuite étendus au cas de plusieurs sources indépendantes, où des expressions analytiques de la CRB sont obtenues pour des grandes valeurs de rapport signal sur bruit (SNR). Nous avons mis en évidence de grandes différences de comportement par rapport aux bornes standards obtenues dans le cas de signaux sources gaussiens complexes circulaires ou non, démontrant ainsi l'intérêt des approches EM dans le cas de connaissances a priori sur la distribution discrète de sources. Ces expressions explicites sont ensuite utilisées

pour définir des seuils statistiques de résolution associés à des sources indépendantes discrètes ou gaussiennes.
Grâce à une méthode de blanchiment, nous étendons les résultats obtenus dans le cas de bruit blanc uniforme au cas de bruit blanc non uniforme en utilisant la propriété essentielle que la norme du vecteur directionnel ne dépend pas de l'angle d'arrivée. Notons que cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas d'un bruit gaussien de matrice de covariance spatiale arbitraire inconnue, ce qui ne permet plus d'obtenir des formes analytiques simples des CRB.

Le **chapitre 7** étend les résultats classiques sur l'estimateur de variance asymptotiquement minimale (AMV) à une suite des statistiques réelles ou complexes dont la première matrice de covariance de sa distribution asymptotique est singulière dans lesquels une borne inférieure sur la matrice de covariance de tout estimateur du second ordre de paramètres réels est obtenue.
Dans ce chapitre, nous donnons des expressions explicites des distributions asymptotiques singulières des projecteurs orthogonaux estimés obtenus à partir des décompositions en valeurs propres des matrices de covariances empiriques associées aux modèles standard et étendu. Différents estimateurs AMV construits à partir de ces matrices des projecteurs empiriques sont présentés ainsi que leurs bornes associées. Dans le cas du modèle de DOA, nous montrons que s'il n'y a aucune connaissance a priori sur les signaux sources gaussiens complexes circulaires ou non circulaires, ces estimateurs sont asymptotiquement efficaces, i.e., les bornes associées sont égales à la CRB gaussienne complexe circulaire ou non circulaire. Ces résultats sont ensuite étendus au cas de paramètres de DOA multidimensionnels par source (azimut, élévation, distance ...) après avoir étendu les expressions de la CRB stochastique gaussienne complexe circulaire ou non démontrées dans le chapitre 5. Nous étendons ces résultats au cas de modèles paramétriques plus généraux $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$ où les signaux $\mathbf{x}_t$ sont complexes circulaires ou non, $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont centrés indépendants, $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont non corrélés, $\mathbf{n}_t$ gaussien circulaire avec $\mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$ et le paramètre Θ identifiable à partir de projecteurs orthogonaux. Enfin, un exemple d'illustration est donné en considérant l'estimation de réponses impulsionnelles du canal SISO bruité.

2.2 Publications de l'auteur

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a été l'occasion de proposer les contributions suivantes :

Chapitre de livre

J.P. Delmas and H. Abeida, "DOA estimation for noncircular signals : performance bounds and algorithms (Ch.9)," *Advances in Direction of Arrival Estimation, Artech House publisher*, 2006.

Articles de revues

J.P. Delmas and H. Abeida, "Stochastic Cramer-Rao bound for non-circular signals with application to DOA estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 11, pp. 3192-3199, November 2004.

H. Abeida and J.P. Delmas, "Cramer-Rao bound for direction estimation of non-circular signals in unknown noise field," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 12, pp. 4610-4618, December 2005.

J.P. Delmas and H. Abeida, " Cramer-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals,"*IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 1, pp. 117-126, Jaunary 2006.

H. Abeida and J.P. Delmas, "MUSIC-like estimation of direction of arrival for non-circular sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 7, pp. 2678-2690, July 2006.

H. Abeida and J.P. Delmas, " Efficiency of subspace-based DOA estimators," in revision to *Signal Processing*, January 2006.

Articles de conférences

H. Abeida et J.P. Delmas, "Efficacités d'algorithmes du second-ordre de localisation de sources non circulaires," *Actes 19ème Colloque GRETSI, Paris*, Septembre 2003.

H. Abeida and J.P. Delmas, " Stochastic Cramer-Rao bound for non-circular signals with application to DOA estimation," *International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Montreal, pp. 253-256, May 2004.

J.P. Delmas and H. Abeida, " Cramer-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK modulated signals," *International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Montreal, pp. 73-76, May 2004.

H. Abeida and J.P. Delmas, "Stochastic Cramer-Rao bound for direction estimation of non-circular signals in unknown noise field," *International conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Philadelphia, pp. 921-924, March 2005.

H. Abeida et J.P. Delmas, "Borne de Cramer-Rao de DOA pour signaux BPSK et QPSK en présence de bruit non uniforme," *Actes 20ème Colloque GRETSI, Louvain, Belgique*, Septembre 2005.

H. Abeida and J.P. Delmas, "Asymptotically minimum variance estimator in the singular case," *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Antalya, Turkey, September 2005.

J.P. Delmas and H. Abeida, "Statistical resolution limits of DOA for discrete sources," *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Toulouse, May 2006.

J.P. Delmas and H. Abeida, "Efficiency of subspace-based estimators," *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Florence, Italy, September 2006.

H. Abeida and J.P. Delmas, "Resolution threshold for closely spaced noncircular emitters," accepted to *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Hawai'i, April 2007.

Chapitre 3

Signaux non circulaires

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de rappeler les principales caractéristiques des signaux non circulaires au second ordre que nous utiliserons dans la suite de ce document. Puisque l'application qui relie le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme, par conséquent, un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ peut toujours être remplacé par un couple des vecteurs aléatoires réeles $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$. On associe à ce couple une densité de probabilité $f(x, y)$ qui doit induire la densité de probabilité de $\mathbf{z}$ notée $f(z)$ où intervient $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^*$. Cependant, toute fonction de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ peut se représenter comme une fonction de $\mathbf{z}$, et de son conjugué $\mathbf{z}^*$. Donc pour obtenir toutes les informations contenues dans le vecteur complexe on doit considérer simultanément $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^*$, qui peuvent être corrélées. Et par conséquent la première matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^H)$ ne décrit pas en général le comportement statistique du second ordre du vecteur complexe $\mathbf{z}$, alors qu'une autre quantité, qui est définie comme deuxième matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^T)$ doit être pris en considération.

Notons que si $\mathrm{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^T) = \mathbf{O}$, alors $\mathbf{z}$ est dite circulaire [74, 52, 4] ou proper [65, 95] au second ordre, de plus si $\mathbf{z}$ est gaussienne complexe circulaire, l'expression de la densité de probabilité [103] est similaire à celle d'un vecteur aléatoire réel gaussien ou $\mathrm{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^H)$ est remplacée par $\mathrm{E}(\mathbf{z}\mathbf{z}^T)$ qui résume les informations contenues dans $\mathbf{z}$ dans le cas réel. C'est la raison pour laquelle la densité de probabilité est définie par de nombreux auteurs seulement dans le cas circulaire.

Dans le cas général, on trouve des vecteurs aléatoires complexes non circulaires ou improper qui sont largement étudiés dans ces dernières années en particulier par [74, 65, 95], pour lesquels la deuxième matrice de covariance est non nulle. Par conséquent, en pratique pour exploiter au mieux l'information contenue dans la deuxième matrice de covariance, on considère un nouveau vecteur aléatoire de dimension $(2M \times 1)$ formé par $\mathbf{z}$ et son conjugué $\mathbf{z}^*$ telle que $\tilde{\mathbf{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{pmatrix}$. Par conséquent, la matrice de covariance $\mathrm{E}(\tilde{\mathbf{z}}\tilde{\mathbf{z}}^H)$ de dimension

$2M \times 2M$ résume l'information du deuxième ordre contenue dans $\mathbf{z}$. Par conséquence, l'utilisation conjointe des deux matrices de covariance devrait permettre d'obtenir de meilleures performances comparée au traitement classique basé seulement sur la première matrice de covariance comme nous le verrons dans la suite de ce document.
Dans les systèmes de communications numériques, les signaux non circulaires au second ordre sont étudiés avec un grand intérêt dans ces dernières années (cf. par exemple, [14, 113, 51, 37]). Parmi ces signaux on peut citer les signaux numériques ASK ou BPSK, OQPSK et certaines modulations CPM à indice de modulation 1/2, telles que les modulations MSK ou GMSK qui peuvent être interprétées (de façon exacte [resp. approchée] pour la MSK [resp. GMSK]) comme des modulations linéaires de type BPSK après une simple opération de dérotation des observations en bande de base [53, 113].
Dans ce chapitre, nous rappelons différentes définitions de circularité des variables ou vecteurs aléatoires complexes ainsi que diverses propriétés statistiques. De plus, nous définirons différents paramètres que nous utiliserons dans ce document, tel que le taux de non circularité d'un signal non circulaire à l'ordre 2 appartenant à l'intervalle $[0,\ 1]$ est égal à 0 pour des signaux circulaires et 1 pour des signaux non circulaires de non circularité maximale comme la BPSK non filtrée. Nous relions ce taux de non circularité au coefficient de corrélation des parties réelles et imaginaires. Nous donnons également la loi asymptotique d'un estimateur empirique du taux de non circularité. Nous donnons quelques éléments sur le filtrage de signaux non circulaires qui nous permettrons de contrôler le taux de non circularité dans nos simulations. Enfin, nous donnons quelques exemples de modulations numériques non circulaires au second ordre obtenues après dérotation.

3.2 Diverses définitions de la circularité

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions de circularité des variables ou vecteurs aléatoires complexes présentées dans [74]. Nous démontrons ainsi quelques propriétés générales des vecteurs aléatoires non circulaires.

3.2.1 Circularité d'une variable aléatoire scalaire

Une variable aléatoire Z_k est dite circulaire si les deux variables aléatoires Z_k et $e^{i\theta}Z_k$ ont la même distribution de probabilité quelque soit θ. De plus, si $Z_k = A_k e^{i\Phi_k}$ où $\Phi_k \in [0,\ 2\pi]$, alors la circularité de Z_k peut être également caractérisée par :

$$f(a_k, \phi_k) = \frac{1}{2\pi} f(a_k), \tag{3.2.1}$$

où $f(a_k, \phi_k)$ et $f(a_k)$ sont des PDF de A_k. Ceci implique que l'amplitude A_k et la phase Φ_k sont deux variables indépendantes et que Φ_k est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0,\ 2\pi]$. La PDF de A_k est donc arbitraire.
En effet, puisque $Z_k = A_k e^{i\Phi_k}$ et $Z'_k \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\theta}Z_k$ ont la même distribution de probabilité pour tout

valeur de θ si et seulement si les deux PDF associées sont égales : $f_{Z_k}(a_k, \phi_k+\theta) = f_{Z_k}(a_k, \phi_k)$ puisque $f_{Z'_k}(a_k, \phi_k) = f_{Z_k}(a_k, \phi_k+\theta)$. Donc $f(a_k, \phi_k) \stackrel{\text{def}}{=} f_{Z_k}(a_k, \phi_k)$ ne dépend pas de ϕ_k, ceci implique qu'il existe une fonction g telle que $f(a_k, \phi_k) = g(a_k)$. Et par conséquent, la PDF marginale de A_k est donnée par $f(a_k) = \int_0^{2\pi} f(a_k, u)du = 2\pi g(a_k)$. D'où l'égalité (3.2.1).

3.2.2 Circularité marginale d'un vecteur aléatoire

Soit $\mathbf{Z}$ un vecteur aléatoire complexe $m\times 1$ de composants complexes Z_k. Alors, $\mathbf{Z}$ est circulaire marginalement si ses composantes Z_k, sont complexes circulaires. La PDF marginale de la composante Z_k est alors donnée par (3.2.1) où la fonction $f(.)$ dépend de k.

3.2.3 Circularité faible d'un vecteur aléatoire

Le vecteur aléatoire complexe $\mathbf{Z}$ est dit faiblement circulaire si $\mathbf{Z}$ et $e^{i\theta}\mathbf{Z}$ ont la même distribution de probabilité quelque soit θ.
Soit $f(\mathbf{a}, \phi_1, \ldots, \phi_m)$ la PDF des amplitudes A_k et des phases Φ_k de Z_k, $1 \leq k \leq m$. La circularité faible est alors caractérisée par :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\phi}) &= g(\mathbf{a}, \phi_1, \ldots, \phi_m) \\ &= f(\mathbf{a}, \phi_1+\theta, \phi_2+\theta, \ldots, \phi_m+\theta), \ \forall\theta. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Par conséquent, $f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\phi})$ est seulement une fonction g de $(m-1)$ variables ϕ_k telle que

$$f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\phi}) = f(\mathbf{a}, \phi_2-\phi_1, \phi_3-\phi_1, \ldots, \phi_m-\phi_1). \tag{3.2.3}$$

Puisque les phases sont définies modulo 2π, par conséquent à partir d'égalités (3.2.1) et (3.2.3), la circularité faible implique la circularité marginale.

3.2.4 Circularité forte d'un vecteur aléatoire

Le vecteur aléatoire complexe $\mathbf{Z}$ est dit fortement circulaire si

$$f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\phi}) = f(\mathbf{a}, \phi_1+\theta_1, \phi_2+\theta_2, \ldots, \phi_m+\theta_m),$$

pour des valeurs arbitraires θ_k avec $1 \leq k \leq m$. Ceci implique que

$$f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\phi}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m f(\mathbf{a}), \tag{3.2.4}$$

ce qui montre que les phases Φ_k sont des variables aléatoires indépendantes entre elles et avec le vecteur $\mathbf{A}$ qui contient les amplitudes A_k. Il est évident que l'égalité (3.2.4) implique l'égalité (3.2.2), ce qui implique que la circularité forte implique la circularité faible.

3.2.5 Circularité totale d'un vecteur aléatoire

Cette circularité apparaît quand les variables aléatoires Z_k sont indépendantes et circulaires. Ceci est caractérisé par le fait que la PDF $f(\mathbf{a})$ donnée par l'égalité (3.2.4) peut être factorisée comme produit des PDF $f_k(a_k)$ de A_k. Notons que la circularité totale implique la circularité forte et que la circularité marginale et l'indépendance donnent la circularité totale.

3.2.6 Circularité au sens des moments

Le vecteur aléatoire complexe centré $\mathbf{Z}$, dont les moments existent à tous les ordres est circulaire si et seulement si tous ses moments de la forme :

$$\mu_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\prod\nolimits_{\sum a_i=p} Z_i^{a_i} \prod\nolimits_{\sum b_j=q} Z_j^{*b_j}\}$$

sont nuls dés que $p \neq q$. Nous déduisons à partir de cette définition par exemple qu'une variable aléatoire scalaire Z complexe circulaire vérifie $\mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{E}(Z^2) = 0$, $\mathrm{E}(Z^2 Z^*) = 0 \ldots$ Notons que la circularité faible entraîne la circularité des moments. En effet, si $\mathbf{Z}$ est circulaire faiblement alors $\mathbf{Z}$ et $e^{i\theta}\mathbf{Z}$ ont la même loi de probabilité, donc en particulier ont les mêmes moments quel que soit θ. D'où

$$\mu_{pq}(\mathbf{Z}) = \mu_{pq}(\mathbf{Z}e^{i\theta}) = \mu_{pq}(\mathbf{Z})e^{i(p-q)\theta}.$$

Par conséquent, si $p \neq q$, alors $\mu_{pq}(\mathbf{Z}) = 0$.

Le vecteur aléatoire complexe $\mathbf{Z}$ est circulaire à l'ordre r s'il vérifie :

$$\mathrm{E}\{\prod\nolimits_{\sum a_i=p} Z_i^{a_i} \prod\nolimits_{\sum b_j=q} {Z_j}^{*b_j}\} = 0$$

pour tout couple (p, q) d'entiers positifs tel que $p + q \leq r$ et $p \neq q$.

Le vecteur aléatoire complexe centré $\mathbf{Z}$ est circulaire à l'ordre 2 si sa deuxième matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)$ est nulle.

Cas gaussien : Si $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ est gaussien circulaire à l'ordre 2, alors $\mathrm{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) = \mathbf{O}$ implique que $\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T - \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) = \mathbf{O}$ et que $\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T + \mathbf{Y}\mathbf{X}^T) = \mathbf{O}$. Autrement dit, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ont même matrice de covariance, et leur covariance croisée est antisymétrique. En conséquence, pour des vecteurs aléatoires gaussiens, la circularité à l'ordre 2 entraîne la circularité à tous les ordres et est caractérisée par deux propriétés suivantes liant les parties réelle et imaginaire $\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \mathrm{E}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T) = -\mathrm{E}(\mathbf{Y}\mathbf{X}^T)$.

3.3 Contrôle de la non circularité

Dans ce document, nous considérons comme non circulaires à l'ordre 2 (NC), des vecteurs aléatoires [resp. variables ou processus aléatoires] telles que $\mathrm{E}(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) \neq \mathbf{O}$ [resp. $\mathrm{E}(z^2) \neq 0$].

Définition 3.1 *Le degré de non circularité au second ordre d'une variable aléatoire Z centrée est mesuré par le taux de non circularité noté ρ de module inférieur à 1 défini par :*

$$\frac{\mathrm{E}(Z^2)}{\mathrm{E}(|Z|^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \rho e^{i\phi}, \tag{3.3.5}$$

où le paramètre ϕ est la phase de non circularité.

Dans ce document, selon les valeurs prises par ce taux de non circularité ρ dans l'intervalle $]0,\ 1]$, nous distinguons deux type de signaux :

- signaux de non circularité du second ordre maximale (i.e., $\rho = 1$), parmi lesquels on peut citer les signaux obtenus sans prétraitement de dérotation telles que la ASK et la BPSK ou les signaux obtenus après prétraitement de dérotation telles que la MSK, que nous examinons dans la section 3.6
- signaux de non circularité du second ordre non maximale (i.e., $\rho < 1$), parmi lesquels on peut citer les modulations BPSK filtrées (utilisées dans nos simulations) et la modulation GMSK (modulation du GSM) obtenue après prétraitement de dérotation, que nous examinons respectivement dans la section 3.5 et 3.6.

3.3.1 Relation entre taux de non circularité et coefficient de corrélation

Puisque le taux de non circularité ρ satisfait (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\rho = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z = |Z|e^{i\phi/2},$$

c'est à dire que la variable aléatoire $Z = X + iY$ est située sur la droite de direction $\phi/2$ (modulation rectiligne), il est intéressant d'examiner la relation entre le taux de non circularité ρ de Z et le coefficient de corrélation $\rho_{co} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{E}(XY)}{\sqrt{\mathrm{E}(X^2)\sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}}}$ de X et Y. Nous démontrons pour cela le résultat suivant :

Résultat 3.1

- $\rho = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho_{co} = \pm 1$
- $\rho = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_{co} = 0$ *(la réciproque est fausse car $\rho_{co} = 0$ n'implique pas $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$)*
- $\rho \geq |\rho_{co}|$ *et* $\rho = |\rho_{co}|$ *pour* $\sigma_X \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma_Y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$.
- *pour $\rho \neq 0$, $\phi/2$ est la direction de régression orthogonale du couple (X, Y) (axe principal)*

Preuve : D'après la définition 3.1, nous obtenons la relation suivante qui relie le taux de non circularité ρ et le coefficient de corrélation ρ_{co} :

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathrm{E}(Z^2)|}{\mathrm{E}(|Z|^2)} = \sqrt{\frac{(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X})^2}{(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X})^2} + 4\rho_{co}^2 \frac{1}{(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X})^2}}. \tag{3.3.6}$$

A partir de cette égalité, les trois points du résultats 3.1 sont déduits facilement.
Puisque $\frac{\mathrm{E}(Z^2)}{\mathrm{E}(|Z|^2)} = \rho e^{i\phi}$, nous obtenons la relation suivante qui relie la phase de non circularité ϕ et le coefficient de corrélation :

$$\tan(\phi) = 2\frac{\rho_{co}}{\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}} \quad \text{si} \quad \sigma_X \neq \sigma_Y. \tag{3.3.7}$$

Nous notons que cette égalité (3.3.7) donne les valeurs de ϕ qui annulent la dérivée du carré de la distance moyenne du point (X, Y) à la droite Δ passant par le point $(\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y)) = (0, 0)$ et orthogonale au vecteur $(\cos(\phi/2), \sin(\phi/2))$ pour laquelle que cette dernière distance définie par $D(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((X\cos(\phi/2) + Y\sin(\phi/2))^2)$ est minimale. Plus précisément, la dérivée de D s'annule pour deux droites orthogonales : l'une correspond à un minimum, cela conduit une distance minimum et donc à la droite de régression orthogonale de (X, Y) de direction $\phi/2$. C'est autour de cette droite que le nuage de points s'allonge le plus, on parle de l'axe principal du nuage. L'autre correspond à une distance maximum et cela conduit à une droite orthogonale à la précédente et c'est autour de cette droite que le nuage de points s'allonge moins. Dans le cas particulier où $\rho_{co} = 0$ et $\sigma_X \neq \sigma_Y$, les deux droites précédentes sont les axes de coordonnées. La figure 3.1 représente l'évolution du taux de non circularité en fonction du coefficient de corrélation quand $\sigma_X \neq \sigma_Y$ et $\sigma_X = \sigma_Y$.

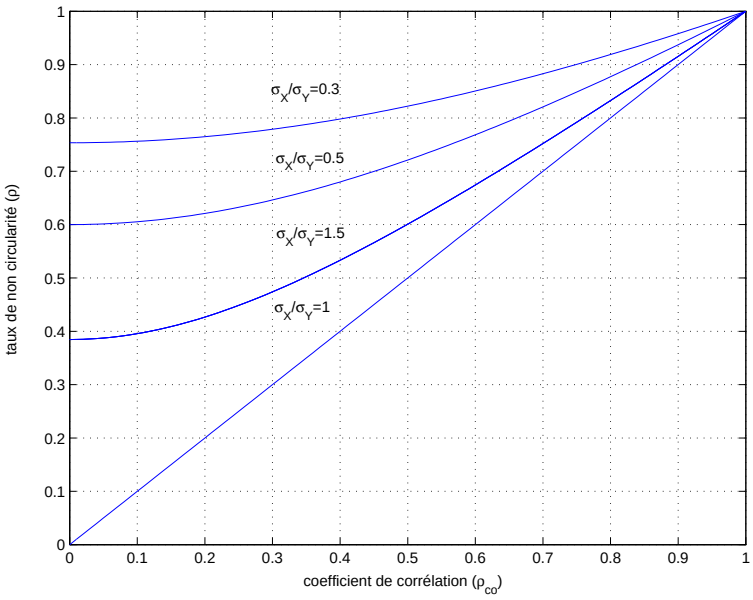

FIG. 3.1 – Coefficient de corrélation en fonction du taux de non circularité avec $\sigma_X \neq \sigma_Y$ et $\sigma_X = \sigma_Y$.

3.3.2 Estimation du taux de non circularité

Considérons une suite de variables aléatoires $(Z_t)_{t=1,\ldots,T}$ centrées du quatrième ordre et de circularité quelconque identiquement distribuées telles que :

$$\mathrm{E}(|Z_t|^2) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(Z_t^2) = \sigma^2 \rho e^{i\phi}.$$

avec $\kappa = \mathrm{Cum}(Z_t, Z_t^*, Z_t, Z_t^*)$, $\kappa' = \mathrm{Cum}(Z_t, Z_t, Z_t, Z_t)$, $\kappa'' = \mathrm{Cum}(Z_t, Z_t, Z_t, Z_t^*)$.
Nous proposons ici d'étudier les performances asymptotiques de l'estimateur empirique ρ_T défini par :

$$\rho_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\sum_{t=1}^T Z_t^2|}{\sum_{t=1}^T |Z_t|^2}.$$

Pour cela, nous considérons d'abord l'étude de la statistique :

$$\lambda_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{t=1}^T Z_t^2}{\sum_{t=1}^T |Z_t|^2},$$

où $\rho_T = |\lambda_T|$, pour laquelle nous démontrons grâce au théorème de continuité (cf. théorème 4.2), le résultat suivant :

Résultat 3.2 *La suite $\sqrt{T}\ (\lambda_T - \lambda)$ avec $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\lambda_T) = \rho e^{i\phi}$, converge en loi vers une loi gaussienne centrée $\mathcal{N}_c\,(0; \mathbf{C}_\lambda, \mathbf{C}'_\lambda)$ où C_λ et C'_λ sont données par :*

$$C_\lambda = \rho^4 - 3\rho^2 + 2 + \frac{\kappa}{\sigma^4}(1+\rho^2) - 2\frac{\rho}{\sigma^4}\Re(\kappa'' e^{-i\phi})$$

et

$$C'_\lambda = \rho^2(\rho^2 - 1)e^{2i\phi} + \frac{1}{\sigma^4}(\kappa' - 2\rho\kappa'' e^{i\phi} + \rho^2\kappa e^{2i\phi}).$$

Preuve : En posant $m_{1,T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T Z_t^2$ et $m_{2,T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T |Z_t|^2$. Nous obtenons grâce à la forte des grands nombres :

$$\mathbf{m}_T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_{1,T} \\ m_{2,T} \end{pmatrix} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \sigma^2\rho e^{i\phi} \\ \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème central limit à la suite des variables aléatoire $\begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix}$ indépendantes identiquement distribuées, on obtient :

$$\sqrt{T}\ (\mathbf{m}_T - \mathbf{m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_c\,(\mathbf{0}; \mathbf{C}_m, \mathbf{C}'_m)\,,$$

avec

$$\mathbf{C}_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left(\left(\begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix} - \mathbf{m}\right)\left(\begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix} - \mathbf{m}\right)^H\right)$$

et

$$\mathbf{C}'_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left(\left(\begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix} - \mathbf{m}\right)\left(\begin{pmatrix} Z_t^2 \\ |Z_t|^2 \end{pmatrix} - \mathbf{m}\right)^T\right).$$

En utilisant le théorème 3.1, nous obtenons après simplifications des calculs :

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} 2\sigma^4 + \kappa & 2\sigma^4\rho e^{i\phi} + \kappa'' \\ 2\sigma^4\rho e^{-i\phi} + \kappa''^* & \sigma^4(1+\rho^2) + \kappa \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C}'_m = \begin{pmatrix} 2\sigma^4\rho^2 e^{2i\phi} + \kappa' & 2\sigma^4\rho e^{i\phi} + \kappa'' \\ 2\sigma^4\rho e^{i\phi} + \kappa'' & \sigma^4(1+\rho^2) + \kappa \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\lambda_T = g(\mathbf{m}_T),$$

avec g est une fonction définie par $g(x,y) = \frac{x}{y}$ continue sur $\mathbb{R}^2$-$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 0\}$, dont la matrice différentielle est donnée par :

$$\mathbf{D}_{g(m)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & -\frac{\rho e^{i\phi}}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

En appliquant le théorème de continuité (cf. théorème 4.2), nous démontrons le résultat 3.2. ■

Résultat 3.3 *La suite* $\sqrt{T}\ (\rho_T - \rho)$ *converge en loi vers une loi gaussienne centrée* $\mathcal{N}_r\,(0; C_\rho)$ *où* C_ρ *est donnée par :*

$$C_\rho = \mathbf{D}_{h(\bar{\lambda})} \mathbf{C}_{\bar{\lambda}} \mathbf{D}_{h(\bar{\lambda})}^T = \frac{1}{2}(\Re(C_\lambda) + \Re(e^{2i\phi} C'_\lambda)).$$

Preuve : En posant $\bar{\lambda}_T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Re(\lambda_T) \\ \Im(\lambda_T) \end{pmatrix} = \mathcal{M}\tilde{\lambda}_T$ où $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et $\tilde{\lambda}_T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_T \\ \lambda_T^* \end{pmatrix}$. En utilisant le théorème de continuité (cf. théorème 4.2) et le résultat 3.2, la suite $\sqrt{T}\ (\bar{\lambda}_T - \bar{\lambda})$ avec $\bar{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Re(\lambda) \\ \Im(\lambda) \end{pmatrix}$, converge en loi vers une loi gaussienne centrée $\mathcal{N}_r\,(\mathbf{0}; \mathbf{C}_{\bar{\lambda}})$ où $\mathbf{C}_{\bar{\lambda}}$ est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\bar{\lambda}} = \mathcal{M}\mathbf{C}_{\tilde{\lambda}}\mathcal{M}^H,$$

où $\mathbf{C}_{\tilde{\lambda}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\lambda}_T \tilde{\lambda}_T^H) = \begin{pmatrix} C_\lambda & C'_\lambda \\ C'^*_\lambda & C^*_\lambda \end{pmatrix}$. Puisque $\rho_T = h(\bar{\lambda}_T) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\Re(\lambda_T)^2 + \Im(\lambda_T)^2}$ où h est une fonction continûment différentiable en $(\Re(\lambda), \Im(\lambda)) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi)) \neq (0,0)$, dont la matrice différentielle est donnée par :

$$\mathbf{D}_{h(\bar{\lambda})} = (\cos(\phi)\ \ \sin(\phi)),$$

le résultat 3.3 est démontré grâce au théorème de continuité (cf. théorème 4.2). ■

3.4 Propriétés générales des vecteurs non circulaires au second ordre

Dans cette section, nous démontrons quelques propriétés des vecteurs aléatoires complexes non circulaires que l'on utilise dans ce document.

Propriété 3.1 *Soient* $\mathbf{Z}_1$ *et* $\mathbf{Z}_2$ *deux vecteurs aléatoires complexes, alors* $\mathbf{Z}_1$ *et* $\mathbf{Z}_2$ *sont non corrélés (au sens réel) si et seulement si* $\mathbf{R}_{z_1 z_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{Z}_1 - \mathrm{E}(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_2 - \mathrm{E}(\mathbf{Z}_2))^H) = \mathbf{O}$ *et* $\mathbf{R}'_{z_1 z_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{Z}_1 - \mathrm{E}(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_2 - \mathrm{E}(\mathbf{Z}_2))^T) = \mathbf{O}$.

Preuve : Pour spécifier la matrice de covariance de $\mathbf{Z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_1 + i\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Z}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_2 + i\mathbf{Y}_2$, nous avons besoin des quatre matrices de covariance

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2); \quad \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2); \\ &\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2); \quad \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

où la matrice de covariance de deux vecteurs aléatoires réels $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ est définie par :

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left((\mathbf{U} - \mathrm{E}(\mathbf{U}))(\mathbf{V} - \mathrm{E}(\mathbf{V}))^T\right).$$

En utilisant les matrices données par l'égalité (3.4.8), nous obtenons après quelques manipulations algébriques simples :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \frac{1}{2}\Re(\mathbf{R}_{z_1 z_2} + \mathbf{R}'_{z_1 z_2}) \\ \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) &= \frac{1}{2}\Re(\mathbf{R}_{z_1 z_2} - \mathbf{R}'_{z_1 z_2}) \\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2) &= \frac{1}{2}\Im(\mathbf{R}_{z_1 z_2} + \mathbf{R}'_{z_1 z_2}) \\ \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2) &= \frac{1}{2}\Im(\mathbf{R}_{z_1 z_2} - \mathbf{R}'_{z_1 z_2}). \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Par suite les quatre matrices de covariance réelles de (3.4.8) sont nulles si et seulement si $\mathbf{R}_{z_1 z_2} = \mathbf{O}$ et $\mathbf{R}'_{z_1 z_2} = \mathbf{O}$. ■

Propriété 3.2 *Si* $\mathbf{X}$ *est un vecteur aléatoire* $(n \times 1)$ *complexe non circulaire au second ordre, i.e.,* $\mathbf{R}'_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{X} - \mathrm{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathrm{E}(\mathbf{X}))^T) \neq \mathbf{O}$*, alors le vecteur* $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ *où* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *et* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ *sont constantes, est également en général non circulaire au second ordre.*

Preuve : Puisque

$$\mathbf{R}'_y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}((\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y}))^T) = \mathbf{A}\mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \neq \mathbf{O}$$

■

Propriété 3.3 *Si* $\mathbf{Y}$ *et* $\mathbf{Z}$ *deux vecteurs aléatoires complexes indépendants où* $\mathbf{Z}$ *est circulaire au second ordre, alors* $\mathbf{X} = a_1\mathbf{Y} + a_2\mathbf{Z}$ *(où* $a_1 \neq 0$ *et* a_2 *deux nombres complexes) est non circulaire au second ordre si et seulement si* $\mathbf{Y}$ *est également non circulaire au second ordre.*

Preuve : L'indépendance de $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ et la circularité au second ordre de $\mathbf{z}$ impliquent que

$$\mathbf{R}'_x = a_1^2\mathbf{R}'_y + a_2^2\mathbf{R}'_z = a_1^2\mathbf{R}'_y.$$

Ainsi $\mathbf{R}'_x \neq \mathbf{O}$ si et seulement si $\mathbf{R}'_y \neq \mathbf{O}$. ■

3.5 Modulations non circulaires filtrées

Nous expliquons dans cette section comment le filtrage linéaire de signaux non circulaires au second ordre tend à rendre en général ces signaux de plus en plus circulaires (c'est à dire à diminuer le taux de non circularité). Nous expliquons ensuite comment nous ferons varier ce taux de non circularité par simple filtrage d'ordre 1 dans les illustrations numériques présentées dans ce document.

3.5.1 Filtrage des modulations non circulaires au second ordre

Considérons l'exemple d'une suite $s_t \in \{+1, -1\}$ indépendants équiprobables filtré par un filtre RIF d'ordre n telle que

$$x_t = \sum_{k=1}^{n} h_k s_{t-k}.$$

Nous proposons dans cette section d'étudier la suite suivante :

$$\rho_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mathrm{E}(x_t^2)|}{\mathrm{E}(|x_t|^2)} = \frac{|\sum_{k=1}^{n} h_k^2|}{\sum_{k=1}^{n} |h_k|^2}.$$

Nous avons $\rho_1 = 1$ car le signal x_t est de non circularité maximale. Par contre pour $n = 2$, en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz, nous avons

$$\rho_2 \leq 1 = \rho_1,$$

d'où la non circularité de x_t diminue. Cependant, on ne peut affirmer que cette suite ρ_n est monotone décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour tout réponse impulsionnelle. Ainsi par exemple $\rho_n = 1$ pour h_k constant.

3.5.2 Contrôle du taux de non circularité

Nous proposons de contrôler la non circularité d'un signal centré de puissance σ^2 de tel sorte que le taux de non circularité ρ puise prendre une valeur arbitraire dans l'intervalle $[0,\ 1]$ ainsi que la phase de non circularité ϕ dans $[0,\ 2\pi]$.
Pour cela nous considérons une suite de symboles $\{+1, -1\}$ indépendants équiprobables filtré par un filtre RIF d'ordre 1

$$x_t = h_0 s_t + h_1 s_{t-1}.$$

Les échantillons $x_1, x_3, \ldots, x_{2T+1}$ sont indépendants, et par conséquent les moments d'ordre deux de x_t peuvent être écrits en fonction de h_0, h_1, ρ et ϕ telles que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(|x_t|^2) &= |h_0|^2 + |h_1|^2 = \sigma^2 \\ \mathrm{E}(x_t)^2 &= h_0^2 + h_1^2 = \sigma^2 \rho e^{i\phi}. \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Pour calculer les deux coefficients h_0 et h_1, nous supposons par exemple que, h_0 est réel, strictement positif et h_1 est complexe. Alors, à partir de l'égalité (3.5.10), on en déduit que (h_0, h_1) seront paramétrés en fonction de ρ et ϕ par :

$$\begin{aligned} h_0 &= \sigma\sqrt{\frac{1-\rho}{2(1-\rho\cos(\phi))}} \\ h_1 &= \frac{\sigma\rho\sin(\phi)}{\sqrt{2(1-\rho\cos(\phi))}} + i\sigma\sqrt{\frac{1-\rho\cos(\phi)}{2}}. \end{aligned}$$

Pour l'évaluation des performances statistiques d'algorithmes examinés dans les chapitres suivants, nous aurons besoin des cumulants d'ordre quatre de x_t. Ceux-ci seront calculés grâce à l'identité suivante :

Théorème 3.1 *Soient Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4, des variables aléatoires centrées complexes circulaires ou non, alors*

$$\mathrm{Cum}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \mathrm{E}(Z_1Z_2Z_3Z_4) - \mathrm{E}(Z_1Z_2)\mathrm{E}(Z_3Z_4) - \mathrm{E}(Z_1Z_3)\mathrm{E}(Z_2Z_4) - \mathrm{E}(Z_1Z_4)\mathrm{E}(Z_2Z_3).$$

En appliquant cette définition, en on déduit que les cumulants d'ordre quatre de x_t sont donnés après simplification par :

$$\begin{aligned} \kappa_{x_t} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(x_t, x_t^*, x_t, x_t^*) = \sigma^4\{4h_0^2\Re(h_1)^2 - 1 - \rho\} \\ \kappa'_{x_t} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(x_t, x_t, x_t, x_t) = 2\sigma^4\{2h_0^2h_1^2 - \rho^2e^{2i\phi}\} \\ \kappa''_{x_t} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(x_t, x_t^*, x_t^*, x_t^*) = \sigma^4\{h_0^4 + |h_1|^2h_1^{*2} + 3(h_1^{*2} + |h_1|^2 - 3\rho e^{-i\phi})\}. \end{aligned}$$

3.6 Exemples de modulations non circulaires au second ordre

3.6.1 Modulation non circulaire sans prétraitement de dérotation

On trouve des signaux x_t modulés en amplitude telle que la modulation ASK ou PAM. Pour ces signaux en bande de base appelés aussi modulation rectiligne,

$$x_t = A_te^{i\phi},$$

où A_t étant le signal réel aléatoire qui porte l'information et ϕ sa phase constante.

3.6.2 Modulation non circulaire avec prétraitement de dérotation

Comme nous le verrons au chapitre 4, seules les signaux de taux de non circularité maximale sont intéressants du point de vue de l'amélioration de la précision des DOA en utilisant la seconde matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$. Nous allons nous concentrer sur des

modulations numériques qui après simple dérotation deviennent rectilignes aux instants d'échantillonnages. Pour cela deux principales classes de modulations sont exploitables : les modulations de phase continue (CPM) et les modulations linéaires décalées.

Modulation MSK

La modulation MSK appartient à ces deux classes. Son amplitude complexes aux instants nT_s (T_s durée symbole) s'écrit :

$$s_n = s_0 \exp(i\frac{\pi}{2}\sum_{i=0}^{n-1} a_n),$$

où la valeur initiale s_0 de module 1 reste inconnue dans l'ensemble $\{1, +i, -1, -i\}$, et a_n est une suite des symboles BPSK indépendants prenant des valeurs ± 1 avec des probabilités égales. Rappelons qu'elle peut être aussi définie [53] par :

$$s_n = i^n s_0 b_n,$$

avec b_n une autre suite des symboles BPSK indépendants, identiquement distribués (IID) prenant des valeurs ± 1 avec des probabilités égales. Par suite

$$s'_n = i^{-n} s_n = s_0 b_n,$$

et donc la dérotation $\pi/2$ à chaque instant permet d'obtenir une modulation rectiligne de taux de non circularité maximale.

Modulation décalée OQPSK

Cette modulation linéaire décalée est définie à l'aide d'un impulsion rectangulaire de longueur $2T_s$ décalée de T_s sur les deux composantes en quadrature (dont la MSK peut être interprétée par un simple changement d'impulsion). Elle satisfait :

$$s_{2n} = \{+1, -1\} \text{ et } s_{2n+1} = \{+i, -i\}.$$

Par suite $s'_n = i^{-n} s_n$ permet aussi d'obtenir une modulation rectiligne.

Remarque 3.1

Notons que la modulation GMSK (utilisée dans le GSM) circulaire du second ordre peut aussi être rendue non circulaire par dérotation, mais cette fois-ci la modulation obtenue n'est plus rectiligne car son taux de non circularité n'est plus maximum.

En effet, grâce aux travaux de Laurent [53], cette modulation CPM peut être approximée par une modulation linéaire et son enveloppe complexe s'écrit [16] :

$$s_n = s(\tau + nT_s) \simeq \varphi_0 i^{\sum_{k=0}^{n-L} a_k} \prod_{l=0}^{L-1} e^{i\frac{\pi}{2} a_{n-l} \phi(\tau + lT_s)},$$

où $\varphi_0 \in \{1, -1, i, -i\}$ est une constante résumant la contribution des symboles précédant l'instant d'origine de l'échantillonnage avec $L = 3$ et où $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} g(u)du$ vérifie $\phi(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\phi(t) = 1$ pour $t \geq LT_s$, avec $g(u)$ issue d'une impulsion gaussienne.

Par suite

$$s'_n = i^{n+1} s_n \simeq \varphi_0 i^{\sum_{k=0}^{n-L}(1+a_k)} \prod_{l=0}^{L-1} e^{i\frac{\pi}{2}(l+a_{n-l}\phi(\tau+lT_s))},$$

et la dérotation de $\pi/2$ à chaque instant $\tau + nT_s$ avec $\tau \neq 0.5T_s$ permet là aussi d'obtenir une modulation non circulaire de taux de non circularité ρ strictement inférieure à 1 car :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(s'_n s'^*_n) &= 1 \\ |\mathrm{E}(s'_n s'_n)| &= \prod_{l=0}^{L-1} |\cos(\pi\phi(\tau + lT_s))| \quad \Rightarrow \quad 0 < |\mathrm{E}(s'_n s'_n)| < 1. \end{aligned}$$

Notons qu'un des prolongement de cette thèse serait d'examiner d'autres modulations numériques pour lesquelles l'amplitude complexe judicieusement échantillonné $s_n = s(\tau+nT_s)$ donnerait à l'aide de dérotations simples des signaux $s'_n = g_n(s_n)$ rectilignes.

Chapitre 4

Algorithmes du second ordre sous espaces non circulaires

4.1 Introduction

L'estimation de DOA des signaux sources bandes étroites reçus sur une antenne de capteurs a été un axe intensif de recherche depuis déjà de nombreuses années en raison des applications importantes en communication numériques [49]. Les algorithmes du second ordre d'estimation de DOA n'exploitent en général que l'information contenue dans les statistiques circulaires d'ordre 2 des observations (cf. par exemple, [93, 78, 102, 84, 117]). Parmi ces algorithmes, on trouve les algorithmes sous espaces, i.e., des algorithmes qui mettent à profit la propriété d'orthogonalité entre les vecteurs directionnels des sources incidentes et le sous espace bruit. Ces algorithmes sont simples à mettre en oeuvre, ce qui les a rendu populaires dans de nombreuses applications telles que les systèmes de communications mobiles [34], et dont les performances asymptotiques ont été largement examinées sous l'hypothèse de signaux sources gaussiens complexes circulaires (cf. par exemple, [6, 47, 78, 84, 48]).

Dans les systèmes de communications numériques, on trouve des signaux complexes non gaussiens, parmi lesquels on peut citer les signaux de modulations BPSK, MSK et OQPSK qui sont largement utilisés [38, 51, 113]. Pour ces signaux non circulaires (sans prétraitement ou après prétraitement de dérotation), des caractéristiques statistiques du second ordre sont également contenues dans la seconde matrice de covariance symétrique complexe $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$ en plus de celles contenues dans $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$, par conséquent les deux questions suivantes s'imposent :

1. L'algorithme MUSIC basé sur la seconde matrice de covariance seule a-t-il des performances des DOA estimées comparables à celle d'algorithmes standards basés seulement sur la première matrice de covariance seule ?
2. Comment combiner ces deux matrices de covariances pour améliorer les performances des algorithmes sous espaces d'estimation des paramètres de DOA ?

3. Existe-t-il des algorithmes de recherche monodimensionnelle ou multidimensionnelle du second ordre d'estimation de DOA qui prennent en compte la non circularité de signaux sources de façon optimale ?

Pour répondre à ces questions, nous considérerons des estimateurs du second ordre *asymptotiquement de variance minimale* (AMV) mis en oeuvre par des estimateurs dits "Covariance Matching Estimation" (COMET) [67] qui exigent des optimisations multidimensionnelles non linéaires proposés dans [22] basés seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ ou sur $(\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H), \mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T))$. Leur matrice de covariance associée joue le rôle d'une borne minimale pour la covariance asymptotique de tout algorithme du second ordre. Cependant, des algorithmes sous espaces de recherche monodimensionnelle construits à partir de la matrice de covariance hermitienne spatiale $\mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^H)$ du modèle d'observation étendue $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t^* \end{pmatrix}$ ont été proposés dans le contexte de sources non corrélées de taux de non circularité maximale reçues sur une antenne linéaire uniforme équidistante dans [36] et [15] où leurs performances asymptotiques sont évaluées uniquement par simulations. Notons également que dans ces dernières années, des algorithmes de type ESPRIT sont proposés dans [40] et [123] dont les performances asymptotiques sont analysées également que par simulations.

Dans ce chapitre, selon le principe de l'algorithme MUSIC standard, nous présentons un algorithme MUSIC basé seulement sur la matrice estimée $\mathbf{R}'_{y,T}$ de la matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$. Nous montrons que ses performances asymptotiques restent très similaires à celles de l'algorithme MUSIC standard basé seulement sur la matrice estimée $\mathbf{R}_{y,T}$ de la matrice de covariance $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$. Dans une seconde étape, nous rappelons brièvement les algorithmes MUSIC non circulaires proposés dans [36, 15] afin d'étendre l'algorithme de [15] à un réseau de structure quelconque. Dans le cas de sources corrélées ou non avec des taux de non circularité maximale ou non, nous proposons un nouveau algorithme MUSIC pondéré en s'inspirant d'algorithmes proposés dans [104, 108]. Les performances asymptotiques de ces algorithmes sont analysées en terme de variance sur les DOA estimées en adoptant une méthodologie permettant d'étudier les performances asymptotiques de tout algorithme de type sous espace, qui permet de donner des expressions explicites des matrices de covariance asymptotiques des projecteurs orthogonaux estimés associés au modèle standard ou étendu. Puisque ces algorithmes sont considérés comme des applications linéaires différentiables par rapport aux projecteurs orthogonaux estimés, des expressions explicites des matrices de covariance des estimées de DOA fournies par tels algorithmes sont analysées et obtenues grâce à une approche fonctionnelle. Différentes propriétés de robustesse de ces algorithmes par rapport à la distribution de signaux sources sont démontrées. Enfin, ces algorithmes sont comparés entre eux et avec l'estimateur AMV à travers des simulations de Monte Carlo et des comparaisons numériques sont présentées pour évaluer l'influence de la non circularité sur chaque algorithme en fonction de la séparation angulaire, de la séparation de phase de non circularité et du SNR.

4.2 Définitions et formulation du problème

Nous considérerons une antenne arbitraire de M capteurs qui reçoit $K < M$ signaux sources bandes étroites, caractérisés par leur DOA $(\theta_k)_{k=1,\dots,K}$. Les enveloppes complexes des signaux observés sont modélisées par les T observations indépendantes identiquement distribuées suivantes :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \qquad t = 1, \dots, T,$$

où $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ est la matrice $(M \times K)$ directionnelle dont les colonnes sont les vecteurs directionnels des sources tel que chaque vecteur $\mathbf{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_k)$ est paramétré par le paramètre θ_k réel scalaire. $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont respectivement la suite des signaux transmis par les sources et du bruit additif. $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont supposés complexes centrés et indépendants l'un de l'autre. $\mathbf{n}_t$ est supposé gaussien complexe circulaire, spatialement non corrélé avec $\mathbf{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$, alors que $\mathbf{x}_t$ est complexe non circulaire de moment d'ordre 4 fini, spatialement corrélé ou non et éventuellement cohérent, de matrices de covariance $\mathbf{R}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^H)$ et $\mathbf{R}'_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T)$. Nous supposons dans ce chapitre que la matrice de covariance $\mathbf{R}_x$ est de rang plein K sauf dans la section 4.6.2 où cette matrice peut être quelconque. En conséquence, les deux matrices de covariance suivantes de $\mathbf{y}_t$ contiennent des informations sur $\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \dots, \theta_K)$

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \mathbf{Q}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{R}'_y = \mathbf{A}\mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \neq \mathbf{O}. \tag{4.2.1}$$

$\left(\mathbf{R}_y, \mathbf{R}'_y\right)$ est paramétré par le paramètre réel $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \sigma_n^2)^T$ où $\boldsymbol{\rho}$ contient les parties réelles et imaginaires des termes de $\mathbf{R}_x$ et de $\mathbf{R}'_x$ (comptés une seule fois).
Les matrices de covariance de $\mathbf{y}_t$ sont respectivement estimées par :

$$\mathbf{R}_{y,T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H \quad \text{et} \quad \mathbf{R}'_{y,T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T.$$

Nous rappelons que le taux de non circularité ρ_k et la phase de non circularité ϕ_k de la $k$ième source sont définis par :

$$\mathrm{E}(x_{t,k}^2) = \rho_k e^{i\phi_k}\mathrm{E}|x_{t,k}^2| = \rho_k e^{i\phi_k}\sigma_{x_k}^2 \text{ et satisfaisant } 0 \leq \rho_k \leq 1.$$

Notons que la corrélation spatiale générale entre deux sources complexes non circulaires est caractérisée par les deux coefficients de corrélation $\rho_{co} \in \mathbb{C}$ et $\rho'_{co} \in \mathbb{C}$ où les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}_x$ sont données par :

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\rho_{co} \\ \sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\rho_{co}^* & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R}'_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2\rho_1 e^{i\phi_1} & \sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\rho'_{co} \\ \sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\rho'_{co} & \sigma_{x_2}^2\rho_2 e^{i\phi_2} \end{pmatrix},$$

où $|\rho_{co}| \leq 1$ et $|\rho'_{co}| \leq 1$ (grâce à l'inégalité de Cauchy Schwartz). De plus, pour des signaux sources non corrélés (au sens réel) nous avons $\rho_{co} = 0$ et $\rho'_{co} = 0$.
Le problème d'intérêt adressé dans ce chapitre est l'estimation de $\boldsymbol{\theta}$ à partir des deux matrices empiriques $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$, en utilisant des algorithmes de type sous espace. Le nombre de sources K est supposé connu.

4.3 Algorithmes subspace fitting et ESPRIT

Nous rappelons dans cette section les principes et les principales propriétés des algorithmes subspace fitting (SF) car dans leur discussion sur la généralisation de l'algorithme weighted subspace fitting (WSF), Cardoso et Moulines [10] ont introduit des conditions de régularités sous lesquelles est dérivée une borne inférieure sur la matrice de covariance asymptotique des estimées de tout estimateur de type sous espace moindre carré pondéré. Dans le chapitre 7, nous comparons ces conditions avec nos conditions sous lesquelles nous avons dérivé des bornes AMV complexes non circulaires.

De plus, nous rappelons également quelques avantages et propriétés principales des algorithmes de type ESPRIT qui ont été adaptés dans ces dernières années à l'estimation de DOA de signaux sources complexes non circulaires de taux de non circularité maximale [123, 40, 90] dont les performances ont été analysées uniquement par simulations.

4.3.1 Algorithme subspace fitting

Il a été montré dans [117], que des algorithmes sous espaces tels que MD-MUSIC, ESPRIT mais aussi l'estimateur du MV peuvent être vues comme des variantes (ou bien des cas particuliers) de l'algorithme SF. Ce dernier, permet un traitement optimal (au sens d'une variance asymptotique minimale des estimées de DOA) du problème de localisation de source. De la même manière que l'estimateur du MV, il est asymptotiquement efficace [117]. L'algorithme SF bien qu'optimal, cumule un certain nombre de défauts qui lui confèrent une complexité supérieure. Comme MUSIC, il nécessite la connaissance de la réponse $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ de l'antenne mais effectue une recherche multidimensionnelle sur l'espace des paramètres $(\theta_1, \ldots, \theta_K)$. Comme l'estimateur du MV, il est itératif nécessitant pour son initialisation une estimée de qualité, et à chaque itération, le calcul d'une décomposition en valeur singulière (SVD).

4.3.2 Algorithme ESPRIT

L'algorithme ESPRIT s'applique à des configurations particulières d'antennes où l'on peut distinguer deux sous antennes identiques (éventuellement se recouvrant partiellement) translatées l'une par rapport à l'autre. La sortie (en réponse à une source) de l'une des sous antennes est égale à celle de l'autre sous antenne à un délai près (fonction du DOA de la source en question). Ce dernier se traduit par un gain complexe unitaire dont la phase est fonction de la translation et des DOA de la source. En présence de plusieurs sources, la matrice directionnelle (dont les colonnes sont les vecteurs directionnels associés aux différentes sources) des sous antennes se déduisent l'une de l'autre par une multiplication par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux s'expriment en fonction des DOA à estimer.
ESPRIT exploite la structure du vecteur directionnel, et non ce vecteur proprement dit. La connaissance de ce dernier n'est alors pas requise et la calibration de l'antenne n'est plus nécessaire. Ceci est un avantage immédiat en comparaison avec MUSIC. Egalement

avantageux par rapport à MUSIC est le fait que ESPRIT, en fournissant une solution analytique, permette l'identification des DOA sans recours à une quelconque recherche (parfois multidimensionnelle). Même si ceci est obtenu au prix d'une EVD supplémentaire, le gain en complexité est significatif, notamment lorsque l'estimation porte sur des paramètres multiples (par exemple lorsque la source n'est pas dans le plan de l'antenne).

Initialement proposé dans [71], cet algorithme a été étendu par une version efficace ESPRIT-TLS (Total Least Square) [68, 84], qui est plus fréquemment employée, bien que d'autres variantes et extensions de cet algorithme ait été développées et analysées telles que l'algorithme ESPRIT-RE (Resolution enhanced) [41] qui propose une amélioration, notamment en termes de résolution par l'introduction d'une pondération dans l'algorithme. Cette notion de pondération est également abordée dans [85], sous l'angle de méthodes de sous espaces pondérés. La version Unitary ESPRIT [39] exploite le caractère unitaire de l'opérateur de déphasage entre les deux sous antennes dans le cas particulier de configurations d'antennes présentant une symétrie centrale.

Dans ces dernières années, cet algorithme a été adapté par [123] à l'estimation de DOA de signaux sources complexes spatialement non corrélés de non circularité maximale, dont les performances asymptotiques ont été analysées uniquement par des simulations et comparées avec celle de l'algorithme ESPRIT circulaire standard. De plus, la version Unitary ESPRIT qui utilise la technique forward-backward a été adaptée également par [40] pour résoudre des sources non circulaires qui peuvent être corrélées ou non corrélées et même cohérentes. Due au doublement virtuel du nombre de capteurs, l'algorithme proposé améliore la capacité de résolution[1] et les performances en termes de variance asymptotique.

4.4 Algorithmes sous espaces basés sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ ou sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$

Dans le cas de signaux sources complexes non circulaires, la seconde matrice de covariance $\mathbf{R}'_y$ contient des informations sur les paramètres de DOA en plus de celles contenues dans la première matrice de covariance $\mathbf{R}_y$. Différents algorithmes du second ordre d'estimation de DOA basés seulement sur $\mathbf{R}_y$ sont largement étudiés sous l'hypothèse de signaux sources gaussiens complexes circulaires. Parmi ces algorithmes, les algorithmes à haute résolution (cf. par exemple, [93, 102, 6, 84, 68, 107]).

Dans cette section, nous rappelons brièvement les algorithmes MUSIC et root-MUSIC standards. En plus, pour examiner l'avantage potentiel de la propriété statistique de non circularité des sources, nous proposons un nouveau algorithme MUSIC (noté Alg_0) basé seulement sur $\mathbf{R}'_y$ comme extension de l'algorithme MUSIC standard en remplaçant une EVD par une SVD.

[1] Dans le cas de signaux sources non, le nombre maximal de sources identifiées avec Unitary ESPRIT non circulaire est de $2(M-1)$ sources, bien qu'avec Unitary ESPRIT circulaire ce nombre est de $M-1$.

4.4.1 MUSIC et root-MUSIC basés seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$

Notons $\mathbf{\Pi}_{y,T}$, la matrice estimée du projecteur orthogonal sur l'espace bruit associé à une estimée $\mathbf{R}_{y,T}$ de $\mathbf{R}_y$. Les estimées de DOA fournies par l'algorithme MUSIC standard [93] sont obtenues grâce aux K minima locaux :

$$\theta_{k,T} = \arg\min_{\theta} g_T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{y,T}\mathbf{a}(\theta). \tag{4.4.2}$$

Dans le cas d'un réseau linéaire uniforme équidistant, Barabell [6] propose l'algorithme root-MUSIC qui est un extension de l'algorithme MUSIC standard où les estimées de DOA sont obtenues cette fois grâce aux K racines :

$$\theta_{k,T} = \arg(z_k) \text{ avec } z_k \ K \text{ racines}_{|z|<1} \text{ les plus proches du cercle unité de } g_T(z),$$

où $g_T(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^T(z^{-1})\mathbf{\Pi}_{y,T}\mathbf{a}(z)$ et où $\mathbf{a}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (1, z, \ldots, z^{M-1})^T$.
Puisque $z^{M-1}\mathrm{g}_T(z)$ est une polynôme de degré $2(M-1)$, il possède $2(M-1)$ racines regroupées par paires z_k et $(z_k^*)^{-1}$ conjugués par rapport au cercle unité, en raison de la symétrie entre les coefficients du $z^{M-1}\mathrm{g}_T(z)$. Pour chacune de ces paires, l'une des racines est contenue à l'intérieur du cercle unité et l'autre à l'extérieur du cercle unité (les deux racines sont égales si elles sont sur le cercle). L'algorithme root-MUSIC permet par conséquent d'estimer jusqu'à $M-1$ sources (cf. par exemple, [93, 86]). Notons que des conditions nécessaires et suffisantes d'identifiabilité du paramètre de DOA de sources complexes circulaires sont dérivées dans [119, 8]. Elles dépendent de la géométrie de l'antenne, de la corrélation de sources et du bruit généré par l'environnement.

4.4.2 MUSIC basé seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$

Notons que les matrices des projecteurs orthogonaux $\mathbf{\Pi}_y$ et $\mathbf{\Pi}'_y$ sur le sous espace bruit associés aux matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ respectivement sont identiques. Selon le principe de l'algorithme MUSIC standard, $\boldsymbol{\theta}$ peut être estimé à partir de $\mathbf{R}'_{y,T}$ seule en adoptant les étapes suivantes : une estimée de la matrice du projecteur $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ est obtenue à partir de la SVD de la matrice symétrique complexe $\mathbf{R}'_{y,T}$, et ensuite les DOA sont estimées grâce aux K minima locaux de la fonction suivante :

$$\theta_{k,T}^{\mathrm{Alg}_0} = \arg\min_{\theta} g_{0,T}(\theta) \qquad \text{avec} \qquad g_{0,T}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}'_{y,T}\mathbf{a}(\theta). \tag{4.4.3}$$

4.5 Algorithmes sous espaces basés sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$

Pour mieux exploiter la propriété de la non circularité des signaux sources afin d'améliorer les estimées de DOA en combinant ces deux statistiques $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$, nous construisons le

nouveau vecteur d'observation $\tilde{\mathbf{y}}_t$ à partir du vecteur d'observation $\mathbf{y}_t$ de dimension $M \times 1$ et son conjugué :

$$\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_t^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_t \\ \mathbf{n}_t^* \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{n}}_t.$$

Notons que le vecteur d'observation $\tilde{\mathbf{y}}_t \in \mathbb{C}^{2M}$ peut être interprété comme le vecteur d'observation reçu par un réseau virtuel à $2M$ capteurs construit à partir du réseau initial de M capteurs. La matrice de covariance spatiale du modèle étendu contient donc toutes les caractéristiques statistiques du second ordre du signal reçu à travers les deux matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$. Elle est donnée par :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^H) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma_n^2\mathbf{I},$$

avec

$$\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}_{\tilde{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}_x^{'} \\ \mathbf{R}_x^{'*} & \mathbf{R}_x^* \end{pmatrix}.$$

Nous notons que la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ peut être estimée par la matrice empirique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^H$. Nous remarquons que la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ hermitienne $(2K \times 2K)$ a un rang compris entre K et $2K$ selon les corrélations spatiales des signaux sources. Par exemple, dans le cas de signaux sources non corrélés de non circularités maximales (i.e., $\rho_k = 1,\ k = 1, \ldots, K$) ou non maximales (i.e., $\rho_k < 1,\ k = 1, \ldots, K$), les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont diagonales telles que :

$$\mathbf{R}'_x = \mathbf{\Delta}_\sigma\mathbf{\Delta}_\phi \ \text{ ou } \ \mathbf{R}'_x = \mathbf{\Delta}_\rho\mathbf{\Delta}_\sigma\mathbf{\Delta}_\phi$$

avec $\mathbf{\Delta}_\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_K})$, $\mathbf{\Delta}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(\sigma_{x_1}^2, \ldots, \sigma_{x_K}^2)$ et $\mathbf{\Delta}_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(\rho_1, \ldots, \rho_K)$.
Par conséquent,

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix} \mathbf{\Delta}_\sigma \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix}^H \text{ ou } \mathbf{R}_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta}_\phi^* & \mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{\Delta}_\sigma(\mathbf{I}+\mathbf{\Delta}_\rho)}{2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{\mathbf{\Delta}_\sigma(\mathbf{I}-\mathbf{\Delta}_\rho)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{\Delta}_\phi^* & \mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix}^H$$

D'où

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{R}_x) = K \text{ ou } \mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{\Delta}_\sigma(\mathbf{I}+\mathbf{\Delta}_\rho)}{2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{\mathbf{\Delta}_\sigma(\mathbf{I}-\mathbf{\Delta}_\rho)}{2} \end{pmatrix} = 2K.$$

Puisque le gain apporté par l'utilisation de $\mathbf{R}_y^{'}$ est surtout sensible dans le cas de signaux sources spatialement non corrélés de non circularité maximale [22]. Nous considérons dans la suite les deux cas suivants :

- **Cas 1** : signaux sources non corrélés de non circularité maximale ($\rho_k = 1,\ k = 1, \ldots, K$) (par exemple, la modulation non filtrée BPSK) qui conduit à $\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = K$.
- **Cas 2** : signaux sources corrélés ou non de non circularité quelconque pour lesquels $\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = 2K$ (par exemple, signaux de modulation BPSK filtrés non corrélés).

Après décomposition en éléments propres de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, on définit le sous espace signal et bruit respectivement à partir des $\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}})$ premiers vecteurs propres associés aux $\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}})$ plus grandes valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ et des $2M-\mathrm{Rang}(\mathbf{R}_{\tilde{x}})$ derniers vecteurs propres restant :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{U}}_s^H + {\sigma_n}^2 \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H, \tag{4.5.4}$$

où $\tilde{\mathbf{U}}_s$ et $\tilde{\mathbf{U}}_n$ rassemblent respectivement des bases orthonormées du sous espace signal et du sous espace bruit. En utilisant la structure des matrices $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ et $\tilde{\mathbf{A}}$, nous démontrons le lemme suivant :

Lemme 4.1 *La matrice du projecteur orthogonal sur le sous espace bruit est structurée telle que*

$$\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_2 \\ \mathbf{\Pi}_2^* & \mathbf{\Pi}_1^* \end{pmatrix}, \tag{4.5.5}$$

où $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ sont deux matrices respectivement hermitienne et symétrique complexe. De plus, la matrice de projection orthogonale $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ sur le sous espace bruit associé à la matrice estimée $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ du $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ est également structurée sous la forme sous la forme suivante :

$$\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{1,T} & \mathbf{\Pi}_{2,T} \\ \mathbf{\Pi}_{2,T}^* & \mathbf{\Pi}_{1,T}^* \end{pmatrix}, \tag{4.5.6}$$

où $\mathbf{\Pi}_{1,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{2,T}$ sont deux matrices respectivement hermitienne et symétrique complexe.

Preuve : Puisque la matrice de covariance du modèle étendu $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ est structurée par bloc et vérifie la relation $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \mathbf{J}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^*\mathbf{J}$, la partie signal de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ (4.5.4) peut être écrite à l'aide du partitionnement de $\tilde{\mathbf{U}}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \mathbf{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^H & \mathbf{U}_2^H \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^* \\ \mathbf{U}_2^* \end{pmatrix} \mathbf{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^T & \mathbf{U}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{J}.$$

Grâce à l'unicité de la décomposition en éléments propres de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, nous avons $\mathbf{U}_2\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}_2^H = \mathbf{U}_1^*\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}_1^T$ et donc $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1^*\mathbf{\Delta}$ où $\mathbf{\Delta}$ est une matrice diagonale dont la diagonale se compose d'éléments complexes de modules égaux à 1. Par conséquent, la matrice du projecteur orthogonal sur le sous espace bruit est structurée telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} = \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^H & \mathbf{U}_2^H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^H & \mathbf{U}_1\mathbf{\Delta}^*\mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_1^*\mathbf{\Delta}\mathbf{U}_1^H & \mathbf{I} - \mathbf{U}_1^*\mathbf{U}_1^T \end{pmatrix}. \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_2 \\ \mathbf{\Pi}_2^* & \mathbf{\Pi}_1^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons que ce résultat s'étend à $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ car la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ est structurée comme $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$. ■

Nous remarquons que dans le cas 2, $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_1^* \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$, et donc $\mathbf{\Pi}_1$ est un projecteur orthogonal et $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{O}$. Contrairement au

cas 1 où $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ ne sont pas des projecteurs orthogonaux. Notons ainsi que dans le cas 2, la matrice $\mathbf{\Pi}_{1,T}$ n'est plus un projecteur orthogonal mais est définie positive et la matrice $\mathbf{\Pi}_{2,T}$ est simplement symétrique complexe non nulle.
Selon les deux cas mentionnés précédemment et de plus en fonction de la connaissance a priori sur le réseau de capteurs, nous rappelons brièvement les algorithmes proposés dans la littérature ainsi que les algorithmes que l'on propose.

4.5.1 Cas 1 : sources non corrélées de non circularité maximale

Dans ce cas, nous avons :

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{\Delta}_\sigma \quad \text{et} \quad \mathbf{R}'_x = \mathbf{\Delta}_\sigma \mathbf{\Delta}_\phi.$$

Par conséquent, la matrice de covariance spatiale $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ du modèle étendu peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^*\mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix} \mathbf{\Delta}_\sigma \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^*\mathbf{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}. \tag{4.5.7}$$

Le rang de la matrice $\mathbf{R}_x$ est égal au nombre de source K. Donc, le sous espace signal est engendré par les K vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$. A partir de (4.5.7), le vecteur directionnel du modèle étendu est défini par :

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}^*(\theta)e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \tag{4.5.8}$$

Remarquons que ce vecteur dépend respectivement du paramètre de DOA θ et de la phase de non circularité ϕ.
En accord avec le principe de l'algorithme MUSIC standard [93] et le modèle étendu (4.5.7), Gounon *et al.* [36] proposent l'algorithme suivant (noté Alg1) où les estimées de DOA sont obtenues grâce aux K minima locaux :

$$\theta_{k,T}^{\mathrm{Alg_1}} = \arg\min_\theta g_{1,T}(\theta),$$

et

$$g_{1,T}(\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_\phi \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta,\phi)\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}(\theta,\phi) = \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) - |\mathbf{a}^T(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{a}(\theta)|. \tag{4.5.9}$$

Notons que ce minimum obtenu par [36] peut être aussi obtenu en écrivant la fonctionnelle $\tilde{\mathbf{a}}^H(\theta,\phi)\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}(\theta,\phi)$ sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{a}}^H(\theta,\phi)\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}(\theta,\phi) = \mathbf{q}^H(\phi)\mathbf{M}_T(\theta)\mathbf{q}(\phi),$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{q}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ e^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}_T(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^H(\theta) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}^T(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^*(\theta) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Par suite, la minimisation (4.5.9) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g_{1,T}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\phi} \mathbf{q}^H(\phi)\mathbf{M}_T(\theta)\mathbf{q}(\phi), \tag{4.5.10}$$

puisque $\|\mathbf{q}(\phi)\|^2 = 2$ et que la matrice $\mathbf{M}_T(\theta)$ hermitienne définie positive (2×2) structurée $\begin{pmatrix} (\times) & (\diamond) \\ (\diamond)^* & (\times) \end{pmatrix}$ admet comme directions propres des directions $\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\beta} \end{pmatrix}$ structurées comme $\mathbf{q}(\phi)$, soit plus précisément les vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \text{ où } \varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \pi + \arg(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)) \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \text{ où } \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \arg(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)), \end{aligned}$$

associés aux valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) - |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)|^2 \\ \lambda_2 &= \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) + |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)|^2, \end{aligned}$$

et par conséquent, (4.5.10) admet comme minimum la plus petite valeur propre $\lambda_1 = g_{1,T}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) - |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)|^2$.

Puisque la matrice $\mathbf{M}_T(\theta)$ hermitienne définie positive est une estimée consistante de la matrice $\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^H(\theta) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{a}^T(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^*(\theta) \end{pmatrix}$ hermitienne semi-définie positive $(\det(\mathbf{M}(\theta)) = 0)$. Nous proposons un nouveau algorithme empirique (noté Alg_2) défini par :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_2} = \arg\min_{\theta} g_{2,T}(\theta),$$

avec

$$g_{2,T}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det}(\mathbf{M}_T) = \left(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta)\right)^2 - \left(\mathbf{a}^T(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{a}(\theta)\right)\left(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)\right). \tag{4.5.11}$$

Dans le cas particulier d'un réseau linéaire équidistant, on définit la variable complexe z telle que :

$$z = e^{i\theta}. \tag{4.5.12}$$

En remplaçant le vecteur directionnel générique $\mathbf{a}(\theta) = (1, e^{i\theta}, \ldots, e^{i(M-1)\theta})^T$ par $\mathbf{a}(z) = (1, z, z^2, \ldots, z^{M-1})^T$ dans (4.5.11), on obtient l'algorithme root-MUSIC (noté Alg_3) proposé dans [15] et défini par :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_3} = \arg(z_k) \quad \text{avec } z_k \;\; K \text{ racines}_{|z|<1} \text{ les plus proche du cercle unité de } \; g_{3,T}(z) \tag{4.5.13}$$

avec

$$g_{3,T}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathbf{a}^T(z^{-1})\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(z)\right)^2 - \left(\mathbf{a}^T(z)\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{a}(z)\right)\left(\mathbf{a}^T(z^{-1})\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}(z^{-1})\right).$$

Le problème d'estimation de DOA se ramène donc au calcul des racines du polynôme $z^{2(M-1)}g_{3,T}(z)$ de degré $4(M-1)$, qui possède donc $4(M-1)$ racines conjugués par rapport au cercle unité en raison de la symétrie qui lie les coefficients de $z^{2(M-1)}g_{3,T}(z)$. Cet algorithme root-MUSIC non circulaire permet par conséquent d'estimer jusqu'à $2(M-1)$ sources. Ceci doit être souligné puisque le nombre de sources à localiser peut ainsi être supérieur au nombre d'antennes dans le réseau.

Remarque 4.1

Grâce à des simulations nous avons observé que le modèle étendu permet d'estimer jusqu'à $2(M-1)$ sources non corrélées reçues sur un réseau linéaire uniforme (cf. figure 4.1) ou sur un réseau circulaire uniforme (cf. figure 4.2), alors que la capacité du modèle standard n'excède pas $M-1$ sources (cf. par exemple, [15, 31, 36]). Ce nombre il a été également considéré comme un nombre maximal sur le nombre des sources localisées par l'algorithme MUSIC proposé dans [11, 79] et basé sur des statistiques circulaires d'ordre 4.

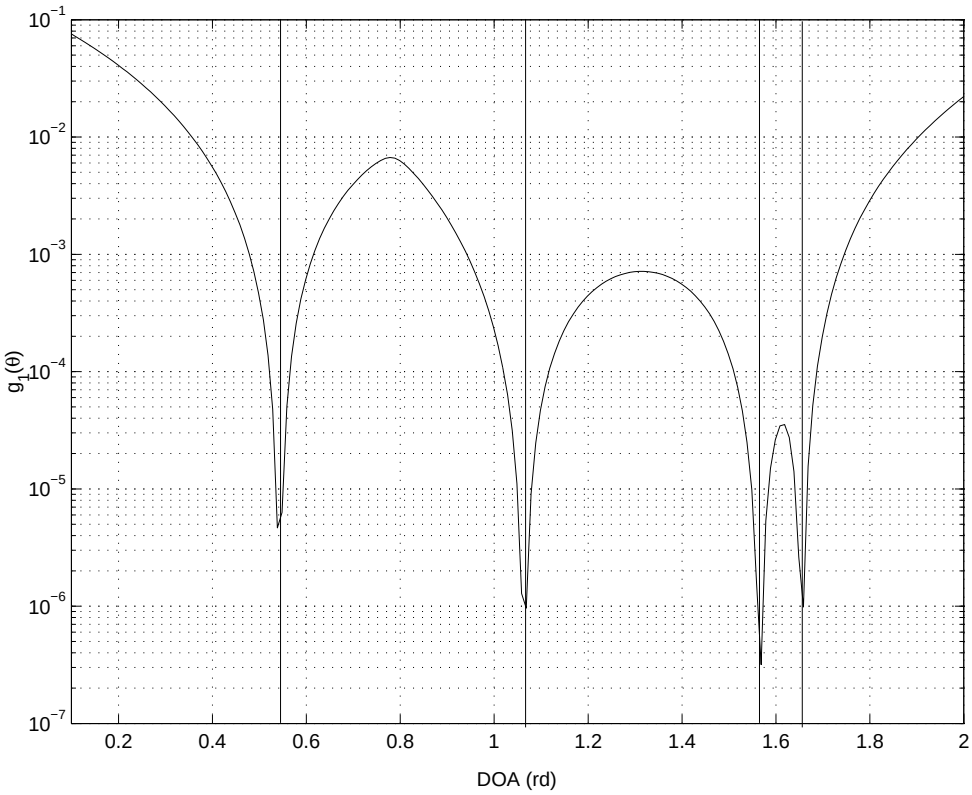

FIG. 4.1 – Localisation de 4 sources non corrélées de taux de non circularité maximale avec l'Alg$_1$ à l'aide d'un réseau linéaire uniforme équidistant de $M=3$ capteurs avec SNR$=12dB$, $T=500$, $\sigma^2_{x_k}=1$ pour $k=1,\ldots 4$ et $\phi_1=\pi/3$, $\phi_2=\pi/2$, $\phi_3=\pi/6$ et $\phi_4=\pi/4$.

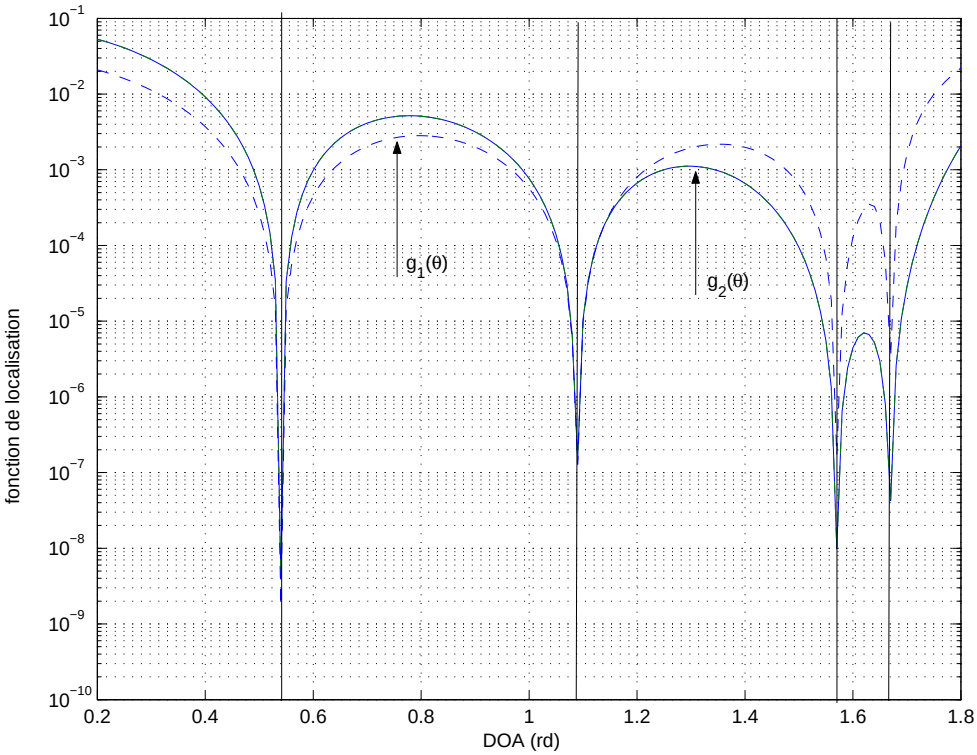

FIG. 4.2 – Localisation de 4 sources non corrélées de taux de non circularité maximale avec l'Alg_1 et l'Alg_2 à l'aide d'un réseau circulaire uniforme ($d = \lambda_0/2$) de $M = 3$ capteurs avec SNR= $20dB$, $T = 500$, $\sigma^2_{x_k} = 1$ pour $k = 1, \ldots 4$ et $\phi_1 = \pi/3$, $\phi_2 = \pi/2$, $\phi_3 = \pi/6$ et $\phi_4 = \pi/4$.

4.5.2 Cas 2 : sources non corrélées ou non de non circularité non maximale

Dans ce cas, le vecteur directionnel (4.5.8) est remplacé par $\bar{\mathbf{A}}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^*(\theta) \end{pmatrix}$ et la matrice du projecteur orthogonal sur le sous espace bruit est donnée par :

$$\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} \left(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_1^* \end{pmatrix},$$

avec $\mathbf{\Pi}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^H$ et $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{O}$. En se basant sur la propriété $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} \bar{\mathbf{A}}(\theta) = \mathbf{O}$ et selon le principe de l'algorithme MUSIC, différents algorithmes de type MUSIC peuvent être considérés. En utilisant la structure de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ avec $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{O}$ et la structure du vecteur directionnel, nous proposons l'algorithme MUSIC suivant (noté Alg_4) :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_4} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi}_{1,T} \mathbf{a}(\theta). \tag{4.5.14}$$

Dans la section 4.6, nous avons démontré (cf. Résultat 4.14) que les performances de cet algorithme sont toujours plus mauvaises que celles de l'algorithme MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$.

Pour améliorer les performances asymptotiques des estimées de DOA dans ce cas, en s'inspirant de l'algorithme MUSIC pondéré sur les colonnes introduit dans l'estimation de DOA

[107] et appliqué à l'estimation des fréquences dans [104, 108], nous proposons l'algorithme MUSIC pondéré suivant (noté Alg_5) :

$$\theta_{k,T}^{\text{Alg}_5} = \arg\min_{\theta} g_{5,T}(\theta), \tag{4.5.15}$$

avec

$$g_{5,T}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{W}^{1/2}\|_{\text{Fro}}^2 = \text{Tr}\left(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}(\theta)\right),$$

où $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{1,2}^* & w_{2,2} \end{pmatrix}$ est une matrice de pondération (2×2) définie positive. Notons que d'autres choix de pondérations conduisent à des matrices de pondérations de tailles plus importantes, ce qui augmenterait la complexité de l'algorithme. En exploitant la structure des matrices $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ et $\bar{\mathbf{A}}$, la fonction du coût $g_{5,T}$ peut s'écrire comme

$$g_{5,T}(\theta) = (w_{1,1} + w_{2,2})\left(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) + \Re(z\mathbf{a}^T(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}(\theta))\right), \tag{4.5.16}$$

avec $z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2w_{1,2}^*}{w_{1,1}+w_{2,2}}$. Par conséquent, la performance de cet algorithme dépend seulement du choix de z. Notons que pour $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ ou diagonale dont les éléments de la diagonale sont non nuls, on trouve $z = 0$ et cet algorithme est équivalent à l'algorithme Alg_4.

4.6 Analyse des performances asymptotiques

4.6.1 Résultats généraux

Dans la littérature, les analyses de performances asymptotiques d'algorithmes sous espaces d'estimation de DOA s'appuient sur des formules de perturbations des vecteurs propres de la matrice de covariance spatiale (cf. par exemple, [102, 86]) ou sur la perturbation des projecteurs orthogonaux (cf. par exemple, [50, 48]). L'avantage de la seconde approche permet de caractériser la loi asymptotique des projecteurs à partir de la loi asymptotique de la matrice de covariance spatiale estimée grâce au théorème de continuité. Nous utilisons cette dernière approche dans notre analyse de performances et nous rappelons les deux théorèmes suivants qui jouent un rôle central par la suite :

Théorème 4.1 *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice hermitienne* $(M \times M)$ *de rang* K *tel que* $K < M$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \mathbf{U}_k {\mathbf{U}_k}^H + \sigma_n^2 \sum_{k=K+1}^{M} \mathbf{U}_k {\mathbf{U}_k}^H,$$

où $\mathbf{\Pi}$ *est la matrice du projecteur orthogonal sur le sous espace engendré par* $(\mathbf{U}_{K+1}, ..., \mathbf{U}_M)$ *dit espace de bruit, alors*

$$\delta\mathbf{\Pi} = -\mathbf{\Pi}\delta\mathbf{A}\mathbf{S}^{\#} - \mathbf{S}^{\#}\delta\mathbf{A}\mathbf{\Pi} + o(\delta\mathbf{A}), \tag{4.6.17}$$

avec $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} - \sigma_n^2\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{K}(\lambda_k - \sigma_n^2)\mathbf{U}_k{\mathbf{U}_k}^H$ *et* $\mathbf{S}^{\#} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\lambda_k - \sigma_n^2}\mathbf{U}_k{\mathbf{U}_k}^H$.

Théorème 4.2 (Théorème de continuité : cas complexe ou réel) *Soit* $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires centrées dans* $\mathbb{R}^n$ *(resp. dans* $\mathbb{C}^n$*), et* $(\phi_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante qui tend vers l'infini,* $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$ *(resp.* $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n$*),* $\mathbf{U}$ *est un ouvert et* g *une fonction de* $\mathbf{U}\subset\mathbb{R}^p$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^q$ *(resp. de* $\mathbf{U}\subset\mathbb{C}^p$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}^q$*) différentiable en* $\mathbf{c}$ *dont la matrice Jacobienne est* $\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}$ *alors si*

$$\phi_n(\mathbf{v}_n-\mathbf{c}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_c(\mathbf{0};\Delta_1,\Delta_2) \qquad \textit{cas complexe,}$$

nous avons

$$\phi_n(g(\mathbf{v}_n)-g(\mathbf{c})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_c(\mathbf{0};\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}\Delta_1\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}^H,\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}\Delta_2\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}^T)$$

et si

$$\phi_n(\mathbf{v}_n-\mathbf{c}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_c(\mathbf{0};\Delta) \qquad \textit{cas réel,}$$

nous avons

$$\phi_n(g(\mathbf{v}_n)-g(\mathbf{c})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_r(\mathbf{0};\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}\Delta\mathbf{D}_{g(\mathbf{c})}^T).$$

4.6.2 Borne asymptotique de variance minimale

Pour évaluer l'effet de la non circularité des signaux sur les performances statistiques d'algorithmes du second ordre basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $\left(\mathbf{R}_{y,T},\mathbf{R}'_{y,T}\right)$, nous avons besoin d'un algorithme de référence et d'une borne inférieure sur la matrice de covariance des estimées de DOA. Aux estimateurs du MV et à la borne de Cramer Rao qui servent habituellement de référence difficile à calculer quand des connaissances a priori sont disponibles sur les signaux sources. Nous préférons les approches AMV (cette approche sera abordée au chapitre 7) du second ordre mis en oeuvre par des algorithmes de type COMET "Covariance Matching Estimation" [67] basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $\left(\mathbf{R}_{y,T},\mathbf{R}'_{y,T}\right)$, où les matrices de covariance associées jouent le rôle de bornes minimales sur les matrices de covariance asymptotiques de tout algorithme du second ordre [67, 22]. Dans cette section, nous étendons les bornes AMV basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $\left(\mathbf{R}_{y,T},\mathbf{R}'_{y,T}\right)$ démontrées dans [22] avec de signaux sources non circulaires gaussiens ou non affectés par un bruit blanc uniforme au cas du modèle de bruit paramétré linéairement par des paramètres identifiables. Nous montrons différentes propriétés de ces bornes. Enfin, nous présentons différentes comparaisons numériques entre ces bornes qui illustrent le gain apporté par la seconde matrice de covariance sur les performances asymptotiques des estimées des paramètres de DOA, qui sont sensibles à des connaissances a priori que nous disposons sur les signaux sources.

Hypothèses supplémentaires

En plus des notations données par la section 4.2, nous supposons que la matrice de covariance $\mathbf{R}_x$ de signaux sources $\mathbf{x}_t$ peut être singulière ou non et le bruit $\mathbf{n}_t$ peut être également

modélisé par le modèle linéaire (cf. par exemple [30, 35, 72]) de matrice de covariance donnée par :

$$\mathbf{Q}_n = \sum_{m=1}^{N} \sigma_m^2 \mathbf{\Sigma}_m, \tag{4.6.18}$$

où les paramètres σ_m^2 sont réels inconnus et forment le vecteur $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1^2 \ldots, \sigma_N^2)^T$ et où les matrices $\mathbf{\Sigma}_m$ sont supposées hermitiennes connues. Dans ces cas de modèles de bruit, le paramètre $\boldsymbol{\alpha}$ est défini par $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ que nous supposons identifiable à partir de $(\mathbf{R}_y, \mathbf{R}'_y)$ dans le sens suivant :

$$\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}_y(\boldsymbol{\alpha}') \;\text{ et }\; \mathbf{R}'_y(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}'_y(\boldsymbol{\alpha}') \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'. \tag{4.6.19}$$

Nous notons que pour assurer l'identifiabilité des paramètres, des choix des matrices $\mathbf{\Sigma}_m$ et du nombre N de paramètres sont discutés par de nombreux auteurs, en particulier par [35, 32] dans le cas d'observations gaussiennes circulaires. Dans le chapitre 5, nous donnerons des conditions nécessaires qui peuvent ne pas être suffisantes pour assurer l'identifiabilité des paramètres du modèle d'observation gaussienne non circulaire.

De plus, nous notons que si aucune connaissance a priori n'est disponible sur les signaux sources, le rang de $\mathbf{R}_x$ est $\tilde{K} \leq K$ où l'inégalité stricte implique la dépendance linéaire parmi les fronts d'ondes des signaux transmis, par exemple, les trajets multiples dans les systèmes de communications numériques. Nous supposons de plus que $\mathbf{x}_t$ est généré par

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}_t \text{ où } \mathbf{B} \;\text{ est une matrice } (K \times \tilde{K}) \;\text{ de rang plein colonne} \tag{4.6.20}$$

et où $\bar{\mathbf{x}}_t = (\bar{x}_{t,1}, \ldots, \bar{x}_{t,\bar{K}})^T$ avec $(\bar{x}_{t,k})_{k=1,\ldots,\bar{K}}$ indépendants de puissance unité. Les cumulants d'ordre quatre de ces $\bar{K}$ signaux sources sont définis par : $\kappa_{\bar{x}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(\bar{x}_{t,k}, \bar{x}^*_{t,k}, \bar{x}_{t,k}, \bar{x}^*_{t,k})$, $\kappa'_{\bar{x}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(\bar{x}_{t,k}, \bar{x}_{t,k}, \bar{x}_{t,k}, \bar{x}_{t,k})$ et $\kappa''_{\bar{x}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Cum}(\bar{x}_{t,k}, \bar{x}^*_{t,k}, \bar{x}^*_{t,k}, \bar{x}^*_{t,k})$.

Présentation de la borne AMV

Dans ce paragraphe, nous rappelons la borne AMV construite seulement à partir de la statistique $\mathbf{s}_T = \mathbf{R}_{y,T}$ ou à partir de la statistique $\mathbf{s}_T = (\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ présentée dans [22]. Cette borne est obtenue à partir d'une approche fonctionnelle qui consiste à considérer tout estimateur fournissant une estimée $\boldsymbol{\alpha}_T$ de $\boldsymbol{\alpha}$ comme une relation fonctionnelle entre cette estimée $\boldsymbol{\alpha}_T$ et la statistique $\mathbf{s}_T$ dont elle est déduite. Nous notons cette relation fonctionnelle par :

$$\mathbf{s}_T \rightarrow \boldsymbol{\alpha}_T = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}_T),$$

où par hypothèse $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}))$. Les différents estimateurs du second ordre constituent des extensions distinctes de la fonctionnelle $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$ générée par des matrices non structurées $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$ mais respectivement hermitienne et symétrique complexe. La mise en oeuvre de l'approche AMV nécessite que les conditions suivantes soient remplies (cf. [80, 101] et [22] dans les cas respectifs de statistiques réelles et complexes).

- la première matrice de covariance $\mathbf{C}_s$ de la statistique $\mathbf{s}_T$ doit être régulière.

- la fonctionnelle Alg(.) qui consiste à associer à $\mathbf{s}_T$ un estimateur $\boldsymbol{\alpha}_T$ de $\boldsymbol{\alpha}$, soit différentiable par rapport à $\mathbf{s}_T$ au point $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$.

$$\boldsymbol{\alpha}_T = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}_T) = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathrm{vec}(\mathbf{s}_T - \mathbf{s}) + o(\mathbf{s}_T - \mathbf{s}),$$

  où $\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}$ désigne la matrice Jacobienne de la fonctionnelle en $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$.
- le paramètre $\boldsymbol{\alpha}$ est identifiable à partir de $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$.

Sous ces conditions de régularité, il a été démontré dans [80] puis dans [22], le théorème suivant :

Théorème 4.3 *La matrice de covariance asymptotique* $\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha})$ *d'un estimateur* $\boldsymbol{\alpha}_T$ *de* $\boldsymbol{\alpha}$ *donné par un algorithme de second ordre arbitraire est bornée inférieurement par la matrice symétrique réelle* $\left(\mathcal{S}^H\mathbf{C}_s^{-1}\mathcal{S}\right)^{-1}$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathbf{C}_s\left(\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\right)^H \geq \left(\mathcal{S}^H\mathbf{C}_s^{-1}\mathcal{S}\right)^{-1},$$

où $\mathcal{S} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})}{d\boldsymbol{\alpha}}$.

Dans la suite, nous étendons les deux théorèmes principaux définissant les bornes AMV construites respectivement à partir seulement de $\mathbf{R}_{y,T}$ ou à partir de $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, démontrés dans [22] sous l'hypothèse de bruit additif blanc uniforme de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$, au cas de modèle de bruit paramétré linéairement par des paramètres réels identifiables (4.6.18).

Borne AMV basée sur $\mathbf{R}_{y,T}$ seule

Dans ce cas la statistique $\mathbf{s}_T$ est définie par la statistique $\mathbf{r}_{y,T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{vec}(\mathbf{R}_{y,T})$. Nous supposons ici que le paramètre $\boldsymbol{\alpha}$ est identifiable seulement à partir de $\mathbf{R}_y$. Ainsi puisque $\mathbf{R}_{y,T}$ est hermitienne, l'application $\boldsymbol{\alpha}_T = \mathrm{Alg}(\mathbf{r}_{y,T})$ est différentiable par rapport à $\mathbf{R}_{y,T}$ au point $\mathbf{R}_y$ et la matrice de covariance asymptotique de $\mathbf{r}_{y,T}$ est régulière dont la première matrice de covariance est donnée par le théorème limite central standard appliqué aux variables aléatoires $\mathbf{y}_t^* \otimes \mathbf{y}_t$ complexes non circulaires indépendantes telle que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{r_y} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\left((\mathbf{y}_t^* \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_y))(\mathbf{y}_t^* \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_y))^H\right) \\
&= (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{C}_{r_x}(\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}^H) + \mathbf{Q}_n^* \otimes \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_n^* \otimes \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x^*\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{Q}_n \\
&= \mathbf{R}_y^* \otimes \mathbf{R}_y + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_y \otimes \mathbf{R}'^*_y) + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}_x(\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}^H) \\
&= \mathbf{R}_y^* \otimes \mathbf{R}_y + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})(\mathbf{R}'^*_x \otimes \mathbf{R}'_x)(\mathbf{A}^H \otimes \mathbf{A})\mathbf{K} + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}_x(\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}^H),
\end{aligned} \tag{4.6.21}$$

où

$$\mathbf{C}_{r_x} = \mathbf{R}_x^* \otimes \mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_x \otimes \mathbf{R}'^*_x) + \mathbf{Q}_x,$$

et où $\mathbf{Q}_x$ est la matrice de quadrivariance de $\mathbf{x}_t$ qui ne dépend que des propriétés du quatrième ordre des sources avec

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B})\left(\sum_{k=1}^{K} \kappa_{\tilde{x}_k}(\mathbf{e}_{K,k} \otimes \mathbf{e}_{K,k})(\mathbf{e}_{K,k}^T \otimes \mathbf{e}_{K,k}^T)\right)(\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H),$$

où $\mathbf{B}$ est définie par (4.6.20).
Nous notons que dans le cas du modèle de bruit paramétré linéairement, le vecteur $\mathbf{r}_y \stackrel{\text{def}}{=} \text{vec}(\mathbf{R}_y)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_y &= \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H) + \text{vec}(\mathbf{Q}_n) \\
&= (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{R}_x) + \sum_{m=1}^{N} \sigma_m \text{vec}(\mathbf{\Sigma}_m) \\
&= (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{J}_1\boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{\Omega}\boldsymbol{\sigma} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{J}_1 & \mathbf{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_1 \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Psi}_{r_y}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}_2,
\end{aligned} \tag{4.6.22}$$

où le vecteur inconnu $\boldsymbol{\rho}_1$[2] contient les parties réelles et imaginaires des termes de $\mathbf{R}_x$, $\boldsymbol{\rho}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\rho}_1^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ et $\mathbf{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{vec}(\mathbf{\Sigma}_1), \ldots, \text{vec}(\mathbf{\Sigma}_N)]$[3]. La matrice de permutation $\mathbf{J}_1$ de dimension $K^2 \times K^2$ formée de termes 1 et $\pm i$ est définie par :

$$\text{vec}(\mathbf{R}_x) = \mathbf{J}_1\boldsymbol{\rho}_1.$$

D'après l'égalité (4.6.22), le vecteur $\mathbf{r}_y$ dépend linéairement du paramètre de nuisance $\boldsymbol{\rho}_2$, ce qui nous permet de définir un estimateur de $\boldsymbol{\alpha}$ de type COMET [67] qui sera asymptotiquement de variance minimale [22]. Le résultat suivant généralise le théorème démontré dans [22].

Résultat 4.1 *Pour des signaux sources gaussiens ou non gaussiens, complexes circulaires ou non circulaires, la covariance de la distribution asymptotique gaussienne de tout estimateur du second ordre du paramètre DOA seul basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ est bornée inférieurement par la matrice symétrique réelle suivante :*

$$\mathbf{C}^{\text{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathcal{S}_1^H \mathbf{C}_{r_y}^{-1} \mathcal{S}_1\right)^{-1}_{1:K,1:K} = \left(\mathbf{S}_{r_y}^H \mathbf{C}_{r_y}^{-1/2} \mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{C}_{r_y}^{-1/2}\mathbf{\Psi}_{r_y}} \mathbf{C}_{r_y}^{-1/2} \mathbf{S}_{r_y}\right)^{-1} \tag{4.6.23}$$

où $\mathcal{S}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{S}_{r_y}, \mathbf{\Psi}_{r_y})$, $\mathbf{S}_{r_y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{r}_y}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ et $\mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{C}_{r_y}{}^{-1/2}\mathbf{\Psi}_{r_y}}$ dénote le projecteur sur le complément orthogonal de $\mathbf{C}_{r_y}^{-1/2}\mathbf{\Psi}_{r_y}$.
S'il existe un estimateur $\mathbf{C}_{r_y,T}$ consistant de $\mathbf{C}_{r_y}$ construit à partir de la statistique $\mathbf{R}_{y,T}$, alors l'estimateur des moindres carrés non linéaire suivant :

$$\boldsymbol{\alpha}_T = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{R}^L} [\mathbf{r}_{y,T} - \mathbf{r}_y(\boldsymbol{\alpha}')]^H \mathbf{C}_{r_y,T}^{-1} [\mathbf{r}_{y,T} - \mathbf{r}_y(\boldsymbol{\alpha}')] \tag{4.6.24}$$

[2]Notons que dans le cas où nous avons la connaissance a priori que les signaux sources sont non corrélés, le vecteur $\boldsymbol{\rho}_1$ contient les K puissances inconnues des signaux, et $\mathbf{J}_1$ est de dimension $K^2 \times K$.

[3]Dans le cas de bruit blanc uniforme $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$ ($N = 1$, $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{I}$ et $\sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_n^2$). Dans le cas de bruit blanc non uniforme, $\mathbf{Q}_n = \text{Diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_M^2)$ ($N = M$, $\mathbf{\Sigma}_m = \text{Diag}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ avec 1 en position m et $(\sigma_m \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_m^2)_{m=1,\ldots,M}$).

est asymptotiquement de variance minimale. De plus, grâce à la décomposition (4.6.22) *et l'approche COMET [67], nous obtenons à partir de* (4.6.24) *:*

$$\boldsymbol{\theta}_T = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}' \in \mathcal{R}^K} V(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\rho}_{2,T}),$$

où $V(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\rho}_{2,T}) = \left(\boldsymbol{\Psi}_{r_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{r_y,T}^{-1}\mathbf{r}_{y,T}\right)^H \left(\boldsymbol{\Psi}_{r_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{r_y,T}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{r_y}(\boldsymbol{\theta}')\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{r_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{r_y,T}^{-1}\mathbf{r}_{y,T}$ *et* $\boldsymbol{\rho}_{2,T} = \left(\boldsymbol{\Psi}_{r_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{r_y,T}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{r_y}(\boldsymbol{\theta}')\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{r_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{r_y,T}^{-1}\mathbf{r}_{y,T}$ *est un estimateur réel*[4] *de* $\boldsymbol{\rho}_2$.

Remarque 4.2

1. Si les signaux sources sont gaussiens complexes circulaires, nous avons $\mathbf{R}'_y = \mathbf{O}$ et $\mathbf{Q}_x = \mathbf{O}$, et par conséquent $\mathbf{C}_{r_y} = \mathbf{R}_y^* \otimes \mathbf{R}_y$ et la borne AMV donnée par l'égalité (4.6.23) est identique à la borne de Cramer Rao [35, rel.(24)] dérivée sous le modèle de bruit paramétré linéairement défini par l'égalité (4.6.18).
2. Nous notons que la matrice Jacobienne $\mathbf{D}_{r_y}^{\mathrm{AMV}_1}$ associée à la fonctionnelle $\mathbf{R}_{y,T} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}_T$ donnée par (4.6.24), dépend en général de la non circularité et de la distribution des sources et du modèle de bruit à travers la matrice de pondération $\mathbf{C}_{r_y}^{-1}$ donnée par l'égalité (4.6.21). En conséquence, le lemme démontré dans [21] qui énonce que les contraintes $\mathbf{D}_{r_y}^{\mathrm{AMV}_1}(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}) = \mathbf{O}$ ou $\mathbf{D}_{r_y}^{\mathrm{AMV}_1}(\mathbf{a}_k^* \otimes \mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$, $k = 1, \ldots, K$ que vérifie la matrice $\mathbf{D}_{r_y}^{\mathrm{AMV}_1}$ si les sources ne sont pas supposées spatialement non corrélées ou respectivement supposées non corrélées, ne nous permet pas de conclure que l'expression $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta})$ est généralement insensible à la non circularité et à la distribution des sources.

Borne AMV basée conjointement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$

Pour satisfaire les deux premières conditions mentionnées au-dessus, nous éliminons les termes communs de la matrice symétrique complexe $\mathbf{R}'_{y,T}$ et nous ajoutons le complexe conjugué des termes associés afin de construire la statistique $\mathbf{s}_{y,T}$ à partir des statistiques $\mathbf{r}_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{vec}(\mathbf{R}_{y,T})$, $\tilde{\mathbf{r}}'_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{v}(\mathbf{R}'_{y,T})$ et $\tilde{\mathbf{r}}'^*_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{v}(\mathbf{R}'^*_{y,T})$ qui est équivalente à la statistique $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ telle que

$$\mathbf{s}_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{y,T} \\ \tilde{\mathbf{r}}'_{y,T} \\ \tilde{\mathbf{r}}'^*_{y,T} \end{pmatrix},$$

avec $\mathbf{s}_{y,T}^* = \mathbf{P}\mathbf{s}_{y,T}$ où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation définie par :

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

[4]Nous adoptons la même preuve présentée dans [67, 22], l'estimateur $\boldsymbol{\rho}_{2,T}$ est bien réel si $\mathbf{C}_{r_y,T}$ est de même structure, du point de vue partie réelle/imaginaire, que $\mathbf{C}_{r_y}$.

La première matrice de covariance asymptotique de la statistique $\mathbf{s}_{y,T}$ est déduite de celle de $\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{y,T} \\ \mathbf{r}'_{y,T} \end{pmatrix}$ grâce au théorème de continuité 4.2, dont l'expression est donnée dans [22] :

$$\mathbf{C}_{s_y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r_y} & \mathbf{C}_{r_y,r'_y}\mathcal{K}^T & \mathbf{K}\mathbf{C}^*_{r_y,r'_y}\mathcal{K}^T \\ \mathcal{K}\mathbf{C}^H_{r_y,r'_y} & \mathcal{K}\mathbf{C}_{r'_y}\mathcal{K}^T & \mathcal{K}\mathbf{C}'_{r'_y}\mathcal{K}^T \\ \mathcal{K}\mathbf{C}^T_{r_y,r'_y}\mathbf{K} & \mathcal{K}\mathbf{C}'^H_{r'_y}\mathcal{K}^T & \mathcal{K}\mathbf{C}^*_{r'_y}\mathcal{K}^T \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{r'_y} &= (\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{C}_{r'_x}(\mathbf{A}^H\otimes\mathbf{A}^H) + (\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{Q}_n) \\ &+ (\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{Q}_n\otimes\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\otimes\mathbf{Q}_n) \\ &= \mathbf{R}_y\otimes\mathbf{R}_y + \mathbf{K}(\mathbf{R}_y\otimes\mathbf{R}_y) + (\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{Q}_x(\mathbf{A}^H\otimes\mathbf{A}^H) \qquad (4.6.25) \\ \mathbf{C}'_{r'_y} &= (\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{C}'_{r'_x}(\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{A}^T) \qquad (4.6.26) \\ \mathbf{C}_{r_y,r'_y} &= (\mathbf{A}^*\otimes\mathbf{A})\mathbf{C}_{r_x,r'_x}(\mathbf{A}^H\otimes\mathbf{A}^H) \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{C}_{r'_x} = \mathbf{R}_x\otimes\mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}_x\otimes\mathbf{R}_x) + \mathbf{Q}_x$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_{r'_x} &= \mathbf{R}'_x\otimes\mathbf{R}'_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_x\otimes\mathbf{R}'_x) + \mathbf{Q}'_x \\ \mathbf{C}_{r_x,r'_x} &= \mathbf{R}'^*_x\otimes\mathbf{R}_x + \mathbf{K}(\mathbf{R}_x\otimes\mathbf{R}'^*_x) + \mathbf{Q}''_x, \end{aligned}$$

et où $\mathbf{Q}'_x$ et $\mathbf{Q}''_x$ sont des matrices de quadrivariance de $\mathbf{x}_t$ qui ne dépendent que des propriétés du quatrième ordre des sources avec[5]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_x &= (\mathbf{B}\otimes\mathbf{B})\left(\sum_{k=1}^K \kappa'_{\tilde{x}_k}(\mathbf{e}_{K,k}\otimes\mathbf{e}_{K,k})(\mathbf{e}^T_{K,k}\otimes\mathbf{e}^T_{K,k})\right)(\mathbf{B}^T\otimes\mathbf{B}^T) \\ \mathbf{Q}''_x &= (\mathbf{B}^*\otimes\mathbf{B})\left(\sum_{k=1}^K \kappa''_{\tilde{x}_k}(\mathbf{e}_{K,k}\otimes\mathbf{e}_{K,k})(\mathbf{e}^T_{K,k}\otimes\mathbf{e}^T_{K,k})\right)(\mathbf{B}^H\otimes\mathbf{B}^H). \end{aligned}$$

Par définition de $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$ et d'après l'égalité (4.6.22), le vecteur $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$ est une fonction linéaire par rapport à $\boldsymbol{\rho}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ sous le modèle de bruit blanc uniforme ou sous le modèle de bruit paramétré linéairement. Par conséquent, il existe une matrice connue $\boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta})$ de rang plein colonne qui dépend de la paramétrisation de deux matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ telle que :

$$\mathbf{s}_y(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}_2. \qquad (4.6.27)$$

D'après cette égalité, les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent l'identifiabilité de $\boldsymbol{\alpha}$ obtenues en partant de l'égalité (4.6.19) sont équivalentes à celles obtenues à partir de l'égalité suivante :

$$\boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\rho}'_2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}' \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}'_2.$$

[5]Si les sources sont indépendantes, $\mathbf{Q}'_x$ et $\mathbf{Q}''_x$ deviennent $\mathbf{Q}'_x = \sum_{k=1}^K \kappa'_{\tilde{x}_k}(\mathbf{e}_{K,k}\otimes\mathbf{e}_{K,k})(\mathbf{e}^T_{K,k}\otimes\mathbf{e}^T_{K,k})$ et $\mathbf{Q}''_x = \sum_{k=1}^K \kappa''_{\tilde{x}_k}(\mathbf{e}_{K,k}\otimes\mathbf{e}_{K,k})(\mathbf{e}^T_{K,k}\otimes\mathbf{e}^T_K)$.

Puisque le vecteur $\mathbf{s}_y(\boldsymbol{\alpha})$ vérifie les mêmes propriétés du vecteur $\mathbf{r}_y$, le résultat 4.1 peut s'étendre sous la forme générale suivant, ce qui généralise le théorème démontré dans [22] sous le modèle de bruit blanc uniforme [22].

Résultat 4.2 *Pour des signaux sources gaussiens ou non gaussiens, complexes circulaires ou non circulaires, la covariance de la distribution asymptotique gaussienne de tout estimateur du second ordre du paramètre DOA seul basé* $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ *est bornée inférieurement par la matrice symétrique réelle suivante :*

$$\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathcal{S}_2^H \mathbf{C}_{s_y}^{-1} \mathcal{S}_2\right)^{-1}_{1:K,1:K} = \left(\mathbf{S}_{s_y}^H \mathbf{C}_{s_y}^{-1/2} \mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{C}_{s_y}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}_{s_y}} \mathbf{C}_{s_y}^{-1/2} \mathbf{S}_{s_y}\right)^{-1}, \tag{4.6.28}$$

où $\mathcal{S}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{S}_{s_y}, \boldsymbol{\Psi}_{s_y})$, $\mathbf{S}_{s_y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{s}_y}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ *et* $\mathbf{P}^{\perp}_{\mathbf{C}_{s_y}{}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}_{s_y}}$ *dénote le projecteur sur le complément orthogonal de* $\mathbf{C}_{s_y}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}_{s_y}$.

S'il existe un estimateur $\mathbf{C}_{s_y,T}$ *consistant de* $\mathbf{C}_{s_y}$ *construit à partir de la statistique* $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, *alors l'estimateur des moindres carrés non linéaire suivant :*

$$\boldsymbol{\alpha}_T = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{R}^L} [\mathbf{s}_{y,T} - \mathbf{s}_y(\boldsymbol{\alpha}')]^H \mathbf{C}_{s_y,T}^{-1} [\mathbf{s}_{y,T} - \mathbf{s}_y(\boldsymbol{\alpha}')], \tag{4.6.29}$$

est asymptotiquement de variance minimale. De plus, grâce à la décomposition (4.6.27) *et l'approche COMET [67], nous obtenons à partir de* (4.6.29) *:*

$$\boldsymbol{\theta}_T = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}' \in \mathcal{R}^K} V(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\rho}_{2,T}),$$

où $V(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\rho}_{2,T}) = \left(\boldsymbol{\Psi}_{s_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{s_y,T}^{-1}\mathbf{s}_{y,T}\right)^H \left(\boldsymbol{\Psi}_{s_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{s_y,T}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta}')\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{s_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{s_y,T}^{-1}\mathbf{s}_{y,T}$ *et* $\boldsymbol{\rho}_{2,T} = \left(\boldsymbol{\Psi}_{s_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{s_y,T}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{s_y}(\boldsymbol{\theta}')\right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{s_y}^H(\boldsymbol{\theta}')\mathbf{C}_{s_y,T}^{-1}\mathbf{s}_{y,T}$ *est un estimateur réel*[6] *de* $\boldsymbol{\rho}_2$.

Résultat 4.3 *Puisque la statistique* $\mathbf{R}_{y,T}$ *est une fonction de la statistique* $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, *nous avons :*

$$\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta}).$$

Remarque 4.3

Les deux expressions $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta})$ sont généralement sensibles à la non circularité, à la distribution de sources et au modèle de bruit. De plus, selon la connaissance a priori sur les signaux sources, ces deux bornes $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta})$ dépendent des trois modèles principaux suivantes de paramétrisation à travers les deux matrices $\boldsymbol{\Psi}_{r_y}$ et $\boldsymbol{\Psi}_{s_y}$ qui prennent des structures différentes (cf. comparisons numériques) :

- **modèle 1** : si les signaux sources sont non corrélés (au sens réel) de non circularité maximale, les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le vecteur $\left(([\mathbf{R}_x]_{i,i})_{i=1,\ldots,K}, (\phi_i)_{i=1,\ldots,K}\right)^T$.

[6] Nous adoptons la même preuve présentée dans [67, 22], l'estimateur $\boldsymbol{\rho}_{2,T}$ est bien réel si $\mathbf{C}_{s_y,T}$ est de même structure, du point de vue partie réelle/imaginaire, que $\mathbf{C}_{s_y}$.

- **modèle 2** : si les signaux sources sont non corrélés (au sens réel) de non circularité non maximale, les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le vecteur $\Big(([\mathbf{R}_x]_{i,i})_{i=1,\ldots,K}, (\rho_i)_{i=1,\ldots,K}, (\phi_i)_{i=1,\ldots,K}\Big)^T$.
- **modèle 3** : si aucune connaissance a priori n'est disponible sur les signaux sources, les deux matrice $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le vecteur $((\Re([\mathbf{R}_x]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}_x]_{i,j}), \Re([\mathbf{R}'_x]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}'_x]_{i,j}))_{1\leq j<i\leq K}, ([\mathbf{R}_x]_{i,i}, \Re([\mathbf{R}'_x]_{i,i}), \Im([\mathbf{R}'_x]_{i,i})))^T$.

Remarque 4.4
Notons que puisque $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathcal{S}_2^H \mathbf{C}_{s_y}^{-1} \mathcal{S}_2)^{-1}_{(1:K,1:K)}$ qui est pour 2 sources de rang plein colonne si la séparation angulaire $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ et la séparation de phase de non circularité $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ prennent des valeurs non nulles. La variance asymptotique de DOA prend une valeur finie si $\Delta\theta$ tend vers 0 avec $\Delta\phi \neq 0$. Par contre, cette variance tend vers l'infini si $\Delta\theta$ tend vers 0 avec $\Delta\phi = 0$. Ce qui explique la sensibilité de la borne AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ à la séparation de phase de non circularité comparée à la borne AMV basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ (cf. figures 4.11).

Remarque 4.5
Dans le cas de signaux sources gaussiens complexes non circulaires, une expression explicite de la borne de Cramer Rao (CRB) est donnée dans le chapitre 5. Puisque l'estimateur du MV est un estimateur du second ordre asymptotiquement efficace (i.e., la matrice de covariance asymptotique associée à l'estimateur du MV est égale à la CRB), l'expression (4.6.28) où $\mathbf{Q}_x$, $\mathbf{Q}'_x$ et $\mathbf{Q}''_x$ sont nulles dans $\mathbf{C}_{s_y}$ est égale à la CRB gaussienne complexes non circulaire du paramètre de DOA seul si aucune connaissance a priori n'est disponible sur les signaux sources.

Remarque 4.6
Si les signaux sources sont complexes circulaires jusqu'au quatrième ordre, les matrices $\mathbf{R}'_x$, $\mathbf{Q}'_x$ et $\mathbf{Q}''_x$ sont nulles, et par conséquent, $\mathbf{C}_{r_y,r'_y} = \mathbf{O}$ et $\mathbf{C}'_{r'_y} = \mathbf{O}$. Donc $\mathbf{C}_{s_y}$, est diagonale par bloc : $\mathbf{C}_{s_y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r_y} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathcal{K}\mathbf{C}_{r'_y}\mathcal{K}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathcal{K}\mathbf{C}^*_{r'_y}\mathcal{K}^T \end{pmatrix}$. Par conséquent, l'expression de la borne AMV basé sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ réduit à

$$\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\alpha}) = \left(\left(\frac{d\mathbf{r}_y^H}{d\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{0}^T\right)\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r_y}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & (\mathcal{K}\mathbf{C}_{r'_y}\mathcal{K}^T)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{r}_y}{d\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left(\frac{d\mathbf{r}_y^H}{d\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{C}_{r_y}^{-1}\frac{d\mathbf{r}_y}{d\boldsymbol{\alpha}}\right)^{-1},$$

qui est l'expression de la borne AMV basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$.

Remarque 4.7
Nous notons que dans le cas particulier d'une seule source, nous avons observé grâce à des calculs numériques que le paramètre de DOA est découplé des autres paramètres dans les deux matrices $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{S}_1^H \mathbf{C}_{r_y}^{-1} \mathcal{S}_1)^{-1}$ et $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{S}_2^H \mathbf{C}_{s_y}^{-1} \mathcal{S}_2)^{-1}$ et que ces

deux matrices ne dépendent pas en plus de la non circularité et de la distribution de la source. Par conséquent, elles sont identiques respectivement à des expressions de la borne de Cramer Rao gaussienne complexe circulaire et gaussienne non circulaire données dans le chapitre 5, mais nous n'avons pas réussi à démontrer ces propriétés analytiquement.

Comparaisons numériques

Nous comparons maintenant les deux bornes (4.6.23) et (4.6.28) en terme de rapport pour illustrer l'information apportée par la seconde matrice de covariance sur les performances asymptotiques d'algorithmes du second ordre d'estimation de DOA de signaux sources qui peuvent être spatialement corrélés, non corrélés ou cohérents.

Dans les figures présentées dans ce paragraphe, nous considérons deux sources de même puissance ($\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2}$) émettant des signaux BPSK filtrés ou non de même taux de non circularité ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2$) et de phase de non circularité ϕ_1 et ϕ_2 avec SNR$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$. Ces signaux rayonnent sur un réseau linéaire équidistant de $M = 6$ capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$. Nous supposons également que le bruit est blanc uniforme de matrice de covariance paramétrée par σ_n^2.

Nous supposons que ces signaux provienent de deux trajets multiples de DOA θ_1 et θ_2. En choisissant le capteur 1 comme référence, nous avons :

$$\begin{aligned} x_{t,1} &= \bar{x}_{t,1} \\ x_{t,2} &= \cos(\alpha)\bar{x}_{t,1} + \sin(\alpha)\bar{x}_{t,2}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{R}_{\bar{x}} = \sigma^2\mathbf{I} \text{ et } \mathbf{R}'_{\bar{x}} = \sigma^2\rho \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{R}_x = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R}'_x = \sigma^2\rho \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & \cos(\alpha)e^{i\phi_1} \\ \cos(\alpha)e^{i\phi_1} & \cos^2(\alpha)e^{i\phi_1} + \sin^2(\alpha)e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.$$

Les figures 4.3 et 4.4 illustrent la remarque 4.3. Sur ces deux figures, nous observons l'amélioration importante des deux rapports entre les variances asymptotiques de DOA obtenues en se servant de la connaissance a priori que les signaux sources sont non corrélés (au sens réel) où $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ respectivement hermitienne et symétrique complexe sont paramétrées par le modèle 2 et les variances asymptotiques obtenues sans tenir compte de cette connaissance a priori où les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le modèle 3. Notons que le gain apporté par cette connaissance a priori sur les signaux sources est très important avec des algorithmes basés sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$, contrairement aux algorithmes du second ordre basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ où ce gain est seulement significatif au voisinage de $\rho = 1$ et s'accroît quand la séparation angulaire $\Delta\theta$ diminue.

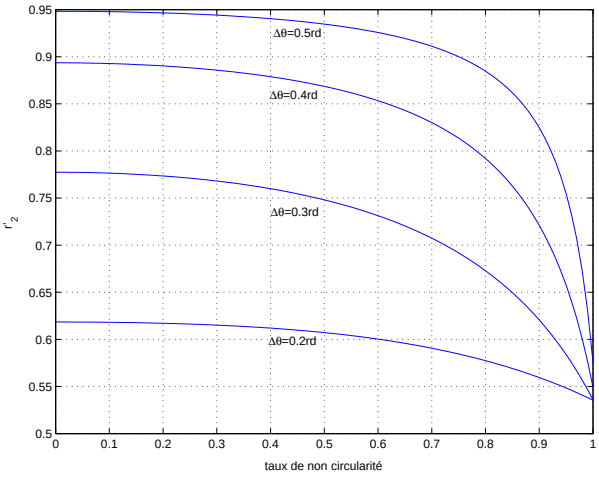

FIG. 4.3 – Rapport r'_2 entre la variance $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)$ calculée avec connaissance a priori de non corrélation des 2 sources et la même variance calculée sans connaissance a priori, en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$15dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

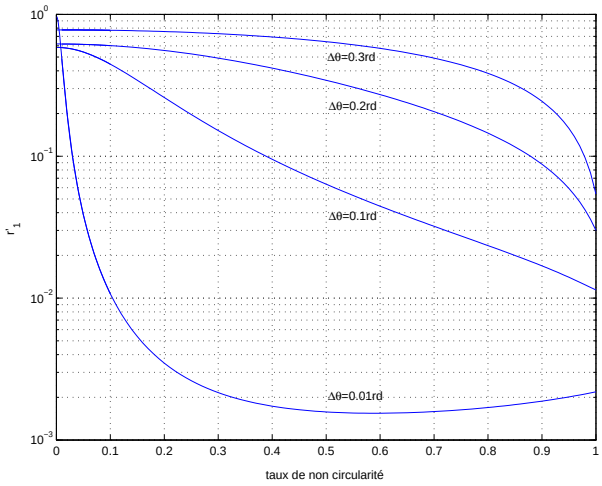

FIG. 4.4 – Rapport r'_1 entre la variance $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)$ calculée avec connaissance a priori de non corrélation des 2 sources et la même variance calculée sans connaissance a priori, en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$15dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

Les figures 4.5 et 4.6 illustrent le rapport $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)/\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)$ en fonction de taux de non circularité pour $\alpha = \pi/2rd$ [resp. $\Delta\theta = 0.1rd$] fixée avec différentes valeurs de $\Delta\theta$ [resp. α] quand aucune information a priori n'est disponible sur les signaux sources (les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le modèle 3). Nous observons à partir des figures 4.5 et 4.6 que pour des grandes valeurs de séparation angulaire et/ou pour des fortes corrélations spatiales entre les sources ($\alpha \approx 0$), la seconde matrice de covariance $\mathbf{R}'_{y,T}$ n'apporte aucune information au-delà de l'information contenue dans la première matrice de covariance $\mathbf{R}_{y,T}$. Par contre avec la connaissance a priori de signaux sources non corrélés (i.e., pour $\alpha = \pi/2rd$), la figure 4.7, montre le gain très important apporté par la seconde matrice de covariance $\mathbf{R}'_{y,T}$ pour des faibles valeurs de $\Delta\theta$, y compris pour des signaux de non circularité non maximale. Cependant, pour des grandes valeurs de $\Delta\theta$, le gain n'est apporté qu'au voisinage de $\rho = 1$.

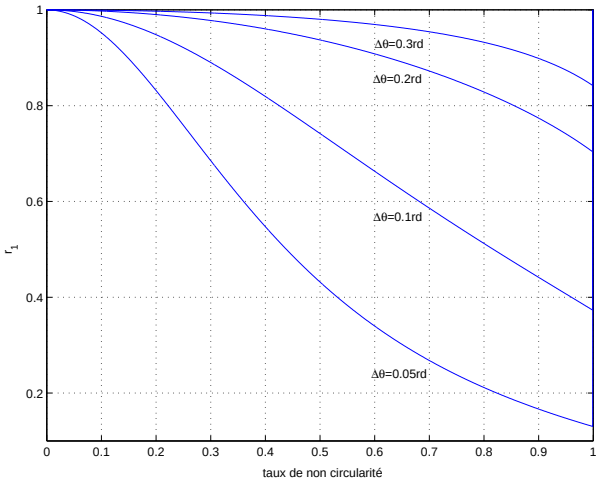

FIG. 4.5 – $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$5dB$, $\Delta\phi = \pi/6rd$ et $\alpha = \pi/2rd$.

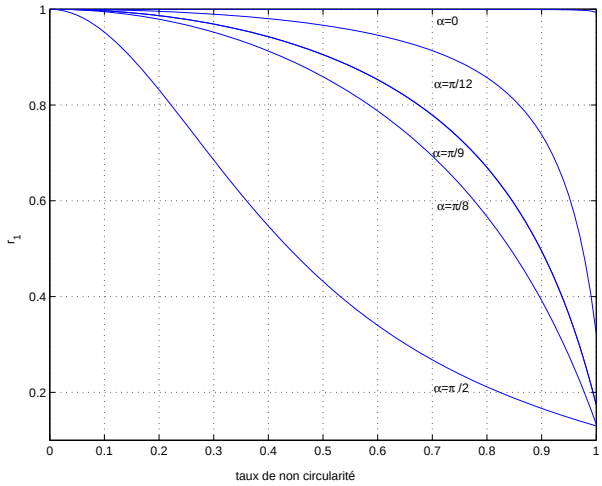

FIG. 4.6 – $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de α avec SNR=$5dB$, $\Delta\theta = 0.05rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

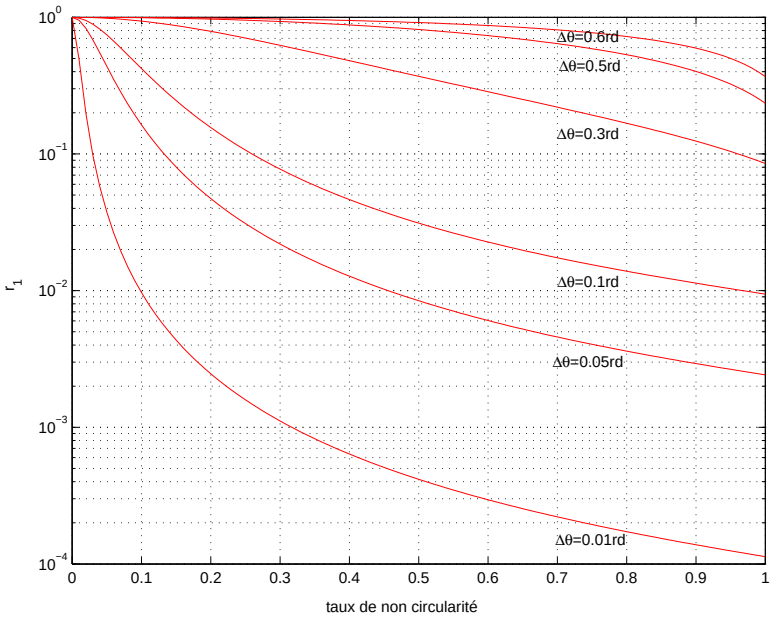

FIG. 4.7 – $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire $\Delta\theta$ avec SNR=$5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

4.6.3 Algorithmes sous espaces basés seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ ou seulement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$

Avant d'étudier les performances asymptotiques des algorithmes du second ordre basés conjointement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$, nous commençons par examiner l'influence de la propriété de non circularité sur les algorithmes du second ordre construits respectivement à partir de $\mathbf{R}_{y,T}$ seule et $\mathbf{R}'_{y,T}$ seule présentés dans la section 4.4.
Puisque ces deux estimateurs sont des fonctions $\theta_{k,T} = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}_T)$ avec $\mathbf{s}_T = \mathbf{\Pi}_{y,T}$ ou $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ différentiables aux voisinages de $\mathbf{\Pi}_y$ seule [resp. $\mathbf{\Pi}'_y$ seule] avec ici $\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{\Pi}'_y$, alors la distribution asymptotique des estimées de DOA fournies par ces deux estimateurs est déduite de la distribution asymptotique de $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ seule [resp. $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ seule]. Nous démontrons pour cela en annexe 1 le résultat suivant qui caractérise la distribution asymptotique de ces deux statistiques :

Résultat 4.4 *Les suites de statistiques*

$$\sqrt{T}\mathrm{vec}\left(\mathbf{\Pi}_{y,T} - \mathbf{\Pi}_y\right) \;\; et \;\; \sqrt{T}\mathrm{vec}\left(\mathbf{\Pi}'_{y,T} - \mathbf{\Pi}'_y\right),$$

convergent en lois vers des lois gaussiennes centrées de premières matrices de covariance respectives :

$$\mathbf{C}_{\Pi} = (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}) + (\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{\Pi}_y) \tag{4.6.30}$$

$$\mathbf{C}_{\Pi'} = (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}') + (\mathbf{U}'^* \otimes \mathbf{\Pi}_y), \tag{4.6.31}$$

où $\mathbf{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_n^2\mathbf{S}^{\#}\mathbf{R}_y\mathbf{S}^{\#}$ *et* $\mathbf{U}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_n^2\mathbf{S}'^{*\#}\mathbf{R}_y^T\mathbf{S}'^{\#}$ *avec* $\mathbf{S} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H$ *et* $\mathbf{S}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T$.

Notons que grâce à l'égalité (4.7.51), les deux matrices $\mathbf{C}_{\Pi'}$ et $\mathbf{C}_{\Pi}$ sont insensibles à la non gaussienneté des sources. De plus, la matrice $\mathbf{C}_{\Pi}$ est insensible à la non circularité de sources contrairement à la matrice $\mathbf{C}_{\Pi'}$ qui dépend de $\mathbf{R}'_x$.

Grâce à des calculs de perturbations, l'erreur d'estimation $\delta\theta_{k,T}$ sur les DOA estimées associée à l'algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ [resp. seulement sur $\mathbf{R}'_{y,T}$], s'exprime en fonction de l'erreur d'estimation de la matrice du projecteur orthogonal $\delta(\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}))$ [resp. $\delta(\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}'_{y,T}))$]. Par conséquent, les propriétés de l'erreur $\delta\theta_{k,T}$ sur les DOA estimées sont déduites de celles des matrices estimées $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ et plus précisément, nous démontrons en annexe 2 que les matrices de covariance asymptotiques des DOA estimées $\boldsymbol{\theta}_T$, obtenues par ces deux estimateurs ont la même structure due à la structure similaire des matrices $\mathbf{C}_{\Pi}$ et $\mathbf{C}_{\Pi'}$:

Résultat 4.5 *Les suites de la statistique* $\sqrt{T}(\boldsymbol{\theta}_T - \boldsymbol{\theta})$ *associées à l'algorithme MUSIC standard et à l'algorithme* Alg_0*, convergent en loi vers une loi gaussienne centrée dont la matrice de covariance associée à ces deux algorithmes est donnée par :*

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,l} = \frac{2}{\alpha_k\alpha_l}\Re\left(\left(\mathbf{a}_k^T\mathbf{V}^*\mathbf{a}_l^*\right)\left(\mathbf{a}'^H_k\mathbf{\Pi}_y\mathbf{a}'_l\right)\right), \tag{4.6.32}$$

avec $\mathbf{a}_k^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_k}{d\theta_k}$ *et* $\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{a}_k^{'H}\mathbf{\Pi}_y\mathbf{a}_k^{'}$*, où* $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ *[resp.* $\mathbf{V} = \mathbf{U}'$*] associée à l'algorithme MUSIC basé seulement sur* $\mathbf{R}_{y,T}$ *[resp. à l'algorithme MUSIC basé seulement sur* $\mathbf{R}'_{y,T}$*].*

Notons que les performances asymptotiques de ces deux algorithmes sont très similaires. Nous démontrons dans l'annexe 2, qu'un algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et un algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}'_{y,T}$ conduisent respectivement dans le cas d'une source non circulaire de puissance $\sigma_{x_1}^2$ telle que $\mathrm{E}(x_{t,1}^2) = \rho_1 e^{i\phi_1}\mathrm{E}(|x_{t,1}|^2)$ aux variances asymptotiques suivantes :

$$C_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|^2}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right] \quad \text{et} \quad C_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1\rho_1^2}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|^2}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right]. \tag{4.6.33}$$

Remarque 4.8

1. Nous notons que pour $\rho_1 = 1$, ces deux variances sont identiques et sont égales à la CRB gaussienne complexe circulaire (cf. chapitre 5).
2. Nous observons que lorsque ρ_1 tend vers zéro, la variance C_{θ_1} associée à l'algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}'_{y,T}$, tend vers $+\infty$. Par conséquent, la seconde matrice de covariance n'apporte plus d'information sur θ_1.

De plus, nous étendons le résultat de robustesse de [21] au cas d'observations non circulaires.

Résultat 4.6 *Les performances asymptotiques de tout algorithme du second ordre basé seulement sur* $\mathbf{R}_{y,T}$ *qui n'utilise pas l'hypothèse éventuelle de non corrélation spatiale des sources sont identiques à celles du cas d'observations gaussiennes complexes circulaires indépendantes.*

Preuve : D'après les hypothèses du résultat 4.6, la matrice Jacobienne $\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}}$ associée à la différentielle de tout algorithme du second ordre Alg(.) qui relie $\boldsymbol{\theta}_T$ et $\mathbf{R}_{y,T}$ satisfait la contrainte [21] :

$$\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}}\left(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}\right) = \mathbf{O}, \tag{4.6.34}$$

et par conséquent, le premier terme de $\mathbf{C}_{r_y}$ (4.6.21) qui contient $\mathbf{R}'_x$ et $\mathbf{Q}_x$ disparaît dans l'expression de la matrice de covariance des DOA estimées $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{Alg}} = \mathbf{D}^{\mathrm{Alg}}\mathbf{C}_{r_y}(\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}})^H$.
Dans le cas d'algorithmes sous espaces, la relation (4.6.34) est équivalente à l'égalité (4.7.51) donnée dans l'annexe 1, où les termes caractérisant les quadrivariances des signaux sources disparaissent dans l'expression de la matrice de covariance des DOA estimées associées à ces algorithmes.

4.6.4 Algorithmes sous espaces basés conjointement sur $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^H)$ et $\mathrm{E}(\mathbf{y}_t\mathbf{y}_t^T)$

4.6.4.1 Lois asymptotiques des projecteurs orthogonaux estimés

Pour évaluer les performances asymptotiques d'un algorithme arbitraire de type sous espace construit à partir de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$, nous adoptons une analyse fonctionnelle qui consiste à considérer

que tout algorithme fournit une estimée $\boldsymbol{\theta}_T$ de $\boldsymbol{\theta}$ comme une relation fonctionnelle entre cette estimée $\boldsymbol{\theta}_T$ et la statistique $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$ dont elle est déduite. $\boldsymbol{\theta}_T$ et $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$ sont reliés à travers la fonctionnelle Alg(.) différentiable telle que $\boldsymbol{\theta}_T = \mathrm{Alg}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T})$ où par hypothèse, $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{Alg}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}})$. Puisque les algorithmes présentés dans la section 4.5 sont des fonctions Alg(.) différentiables de $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$ ou $(\boldsymbol{\Pi}_{1,T}, \boldsymbol{\Pi}_{2,T}, \boldsymbol{\Pi}^*_{2,T})$: extensions distinctes de l'application $(\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \boldsymbol{\Pi}^*_2) \longmapsto \theta_k = \mathrm{Alg}\left(\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \boldsymbol{\Pi}^*_2\right)$ avec $\theta_{k,T} = \mathrm{Alg}\left(\boldsymbol{\Pi}_{1,T}, \boldsymbol{\Pi}_{2,T}, \boldsymbol{\Pi}^*_{2,T}\right)$, les distributions asymptotiques des estimées de DOA associées à tels algorithmes sont directement déduites des distributions asymptotiques de $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$ ou $(\boldsymbol{\Pi}_{1,T}, \boldsymbol{\Pi}_{2,T}, \boldsymbol{\Pi}^*_{2,T})$.

L'erreur d'estimation $\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T} = \mathbf{R}_{\tilde{y},T} - \mathbf{R}_{\tilde{y}}$ due à un nombre fini d'observations induit les erreurs d'estimation $\delta\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T} = \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T} - \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}$ et $\delta\boldsymbol{\theta}_T = \boldsymbol{\theta}_T - \boldsymbol{\theta}$ sur les estimées respectivement du projecteur orthogonal sur le sous espace bruit $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}$ et de $\boldsymbol{\theta}$. Grâce au théorème 4.1, en remplaçant respectivement $\mathbf{A}$ et $\mathbf{S}$ par $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$ dans (4.6.17), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\delta\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T} = -\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} - \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}} + o\left(\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\right), \tag{4.6.35}$$

avec $\tilde{\mathbf{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H$. L'égalité (4.6.35), nous permet d'en déduire les performances asymptotiques de tout algorithme sous espace. Pour caractériser la loi asymptotique de la statistique $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$, nous démontrons tout d'abord le résultat suivant :

Résultat 4.7 *La suite de statistique* $\sqrt{T}\mathrm{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{y},T} - \mathbf{R}_{\tilde{y}})$ *converge en loi vers une loi gaussienne centrée de première matrice de covariance*

$$\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}))\left(\mathbf{R}^*_{\tilde{y}} \otimes \mathbf{R}_{\tilde{y}}\right) + (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Q}_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H), \tag{4.6.36}$$

où $\mathbf{Q}_{\tilde{x}}$ *est la matrice de quadrivariance de* $\tilde{\mathbf{x}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_t^{*T})^T$.

Preuve : En appliquant le théorème central limit à la suite des variables aléatoires $(\tilde{\mathbf{y}}^*_t \otimes \tilde{\mathbf{y}}_t)$ complexes non circulaires indépendantes et equidistribuées, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}} &= \mathrm{E}((\tilde{\mathbf{y}}^*_t \otimes \tilde{\mathbf{y}}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}))(\tilde{\mathbf{y}}^*_t \otimes \tilde{\mathbf{y}}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})^H)) \\
&= (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{C}_{r_{\tilde{x}}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H) + \sigma_n^4\mathbf{I} + \sigma_n^2\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}^*_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \sigma_n^2\mathbf{I} \\
&= \mathbf{R}^*_{\tilde{y}} \otimes \mathbf{R}_{\tilde{y}} + \mathbf{K}(\mathbf{R}'_{\tilde{y}} \otimes \mathbf{R}'^*_{\tilde{y}}) + (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Q}_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H),
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{R}'_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^T)$ et $(\mathbf{Q}_{\tilde{x}})_{i+(j-1)2K,k+(l-1)2K} = \mathrm{Cum}\left((\tilde{\mathbf{x}}_t)_i, (\tilde{\mathbf{x}}_t)^*_j, (\tilde{\mathbf{x}}_t)^*_k, (\tilde{\mathbf{x}}_t)_l\right)$. Puisque $\mathbf{R}'_{\tilde{y}} = \mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{J}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{R}^*_{\tilde{y}}$ où $\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, la matrice de covariance asymptotique $\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}}$ caractérisant la loi asymptotique de $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ peut s'écrire après simplification comme :

$$\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}))\left(\mathbf{R}^*_{\tilde{y}} \otimes \mathbf{R}_{\tilde{y}}\right) + (\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Q}_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H). \tag{4.6.37}$$

■

Notons que la loi asymptotique de la statistique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ donnée par le résultat 4.7 dépend de la distribution de signaux sources à travers le second terme de l'égalité (4.6.36), cependant ce terme disparaît dans la loi asymptotique de $\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T}$ déduite de la loi asymptotique de la distribution asymptotique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ grâce au théorème de continuité 4.2, comme le montre le résultat suivant :

Résultat 4.8 *La suite de statistique* $\sqrt{T}\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T} - \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})$ *converge en loi vers une loi gaussienne centrée dont la première matrice de covariance ne dépend pas des moments d'ordre quatre de signaux sources :*

$$\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = \frac{1}{2}\mathbf{L}\left((\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{U}}) + (\tilde{\mathbf{U}}^* \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\right)\mathbf{L}, \tag{4.6.38}$$

avec

$$\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \end{pmatrix}.$$

Preuve : A l'aide de l'égalité (4.6.35), en utilisant les propriétés de l'opérateur vec(.), on obtient :

$$\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}) = -(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T}) + o\left(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T})\right),$$

Ensuite, en appliquant le théorème de continuité 4.2, la matrice de covariance de la loi asymptotique de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ est donnée par :

$$\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = (\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})^H, \tag{4.6.39}$$

en remplaçant $\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}}$ par son expression (4.6.37) et en utilisant $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$, le second terme de $\mathbf{C}_{r_{\tilde{y}}}$ disparaît dans le calcul puisque :

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})(\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Q}_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H) &= \\ (\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^*\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*}\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{Q}_{\tilde{x}}(\tilde{\mathbf{A}}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^H) &= \mathbf{O},\end{aligned}$$

ceci implique que la distribution asymptotique de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ est insensible aux moments d'ordre quatre des signaux sources. Ensuite en utilisant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} &= \sigma_n^2\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} \\ \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} &= \mathbf{O} \\ \mathbf{J}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} &= \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^*\mathbf{J} \\ \mathbf{J}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} &= \tilde{\mathbf{S}}^{\#*}\mathbf{J} \\ \mathbf{J}^2 &= \mathbf{I},\end{aligned}$$

nous obtenons après des manipulations algébriques simples :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} &= \frac{1}{2}\mathbf{L}\left((\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\left(\mathbf{R}_{\tilde{y}}^* \otimes \mathbf{R}_{\tilde{y}}\right)(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\right)\mathbf{L} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{L}\left(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{U}}^* \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\right)\mathbf{L}.\end{aligned}$$

■

En exploitant la structure des matrices $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ et $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ et grâce à des propriétés algébriques, nous démontrons en annexe 3 le résultat suivant :

Résultat 4.9 *La suite de statistique* $\sqrt{T}\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{1,T}-\mathbf{\Pi}_1) \\ \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{2,T}-\mathbf{\Pi}_2) \\ \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}^*_{2,T}-\mathbf{\Pi}^*_2) \end{pmatrix}$ *converge en loi vers une loi gaussienne centrée de première matrice de covariance :*

$$\mathbf{C}_{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_2^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_1} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_2} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*} \end{pmatrix}, \tag{4.6.40}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\Pi_1} &= (\mathbf{\Pi}_1^* \otimes \mathbf{U}_1) + (\mathbf{U}_1^* \otimes \mathbf{\Pi}_1) + \mathbf{K}((\mathbf{\Pi}_2 \otimes \mathbf{U}_2^*) + (\mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{\Pi}_2^*)) \\
\mathbf{C}_{\Pi_2} &= (\mathbf{I}+\mathbf{K})((\mathbf{\Pi}_1 \otimes \mathbf{U}_1) + (\mathbf{U}_1 \otimes \mathbf{\Pi}_1)) \\
\mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1} &= (\mathbf{I}+\mathbf{K})((\mathbf{\Pi}_2 \otimes \mathbf{U}_1) + (\mathbf{U}_2 \otimes \mathbf{\Pi}_1)) \\
\mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1} &= ((\mathbf{I}+\mathbf{K})(\mathbf{\Pi}_1^* \otimes \mathbf{U}_2^*) + (\mathbf{U}_1^* \otimes \mathbf{\Pi}_2^*)) \\
\mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2} &= (\mathbf{I}+\mathbf{K})((\mathbf{\Pi}_2^* \otimes \mathbf{U}_2^*) + (\mathbf{U}_2^* \otimes \mathbf{\Pi}_2^*)).
\end{aligned}$$

Nous notons que le résultat 4.6 ne peut pas s'étendre aux algorithmes arbitraires du second ordre basés sur $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$, puisque $\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}}\left(\tilde{\mathbf{A}}^* \otimes \tilde{\mathbf{A}}\right) \neq \mathbf{O}$ due à la contrainte sur $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$. Cependant, grâce aux résultats précédents sur la loi asymptotique des projecteurs orthogonaux, le résultat suivant est démontré :

Résultat 4.10 *Les performances asymptotiques de tout algorithme de type sous espace construit à partir de* $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ *ne dépendent que des moments d'ordre deux des signaux sources, donc sont celles du cas gaussien de même non circularité.*

4.6.4.2 Lois asymptotiques des DOA estimées

Cas 1 : sources non corrélées de non circularité maximale

Après avoir caractérisé les lois asymptotiques de différentes statistiques, la loi asymptotique des DOA estimées par les algorithmes présentés dans ce cas peuvent être déduites des lois asymptotiques des statistiques $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ ou $(\mathbf{\Pi}_{1,T}, \mathbf{\Pi}_{2,T}, \mathbf{\Pi}^*_{2,T})$, grâce à des calculs de perturbations permettant l'application du théorème de continuité 4.2. Nous démontrons en annexe 4 le résultat suivant :

Résultat 4.11 *La suite de statistique* $\sqrt{T}(\boldsymbol{\theta}_T - \boldsymbol{\theta})$ *associée aux algorithmes* Alg_1 *et* Alg_2 *pour un réseau arbitraire et associée à l'algorithme* Alg_3 *pour un réseau linéaire uniforme, converge en loi vers la même*[7] *loi gaussienne centrée dont la matrice de covariance est donnée par l'expression suivante :*

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,l} = \frac{1}{\gamma_k\gamma_l}\begin{pmatrix} \alpha^{(k)}_{\phi,\phi} & -\alpha^{(k)}_{\theta,\phi} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{(k,l)} \begin{pmatrix} \alpha^{(l)}_{\phi,\phi} \\ -\alpha^{(l)}_{\theta,\phi} \end{pmatrix} \tag{4.6.41}$$

[7]Ces trois algorithmes ont des comportements différents en dehors du régime asymptotique comme cela est montré dans les simulations.

avec $\left(\mathbf{B}^{(k,l)}\right)_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} 4\Re\left((\tilde{\mathbf{a}}_k^T\tilde{\mathbf{U}}^*\tilde{\mathbf{a}}_l^*)(\tilde{\mathbf{a}}_{i,k}^H\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{a}}_{j,l})\right)$, $i,j = \theta,\phi$ *où* $\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^* e^{-i\phi_k} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{\theta,k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{a}}_k}{d\theta_k}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{\phi,k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{a}}_k}{d\phi_k}$ *et où* $\left(\alpha_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=\theta,\phi}$ *et* γ_k *sont des facteurs purement géométriques :* $\alpha_{i,j}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \Re(\tilde{\mathbf{a}}_{i,k}^H\tilde{\mathbf{\Pi}}\tilde{\mathbf{a}}_{j,k})$ *et* $\gamma_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{\theta,\theta}^{(k)}\alpha_{\phi,\phi}^{(k)} - (\alpha_{\theta,\phi}^{(k)})^2$. *En particulier :*

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,k} = \frac{2\alpha_{\phi,\phi}^{(k)}}{\gamma_k}(\tilde{\mathbf{a}}_k^H\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{a}}_k),\ k = 1,\ldots,K \tag{4.6.42}$$

Preuve : La preuve de ce résultat se fait en trois étapes : premièrement, nous notons que les deux fonctions $\mathrm{g}_{1,T}(\theta)$ et $\mathrm{g}_{2,T}(\theta)$ données respectivement par (4.5.10) et (4.5.11), vérifient l'égalité suivante :

$$g_{2,T}(\theta_k) = g_{1,T}(\theta_k)r_T(\theta_k),$$

avec $r_T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta) + |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta)|$ où en statistique exacte $r_T(\theta_k) \neq 0$ (puisque si les $r_T(\theta_k)$ étaient nuls, nous aurions $\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}(\theta_k) = 0$ et $|\mathbf{a}^H(\theta_k)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}^*(\theta_k)| = 0$ et par conséquent les vecteurs $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^* e^{i\beta} \end{pmatrix}$, appartiendraient à l'espace signal de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ pour toutes les valeurs de β, ce qui est en contradiction avec l'égalité (4.5.7)). Par suite, en appliquant la preuve du théorème [102, Theorem 3.2], les estimées de DOA obtenues en minimisant $\mathrm{g}_{1,T}(\theta)$ et $\mathrm{g}_{2,T}(\theta)$ ont la même distribution asymptotique.
En seconde étape, nous adoptons la même démarche que celle donnée en [48] en remplaçant respectivement les algorithmes MUSIC standard et root-MUSIC standard par les algorithmes 2 et 3, nous démontrons en annexe 4 que les algorithmes 2 et 3 vérifient la même équation de perturbation suivante, et par conséquent les lois asymptotiques des DOA estimées associées sont identiques :

$$\theta_{k,T} = \theta_k + \mathbf{A}_{1,k}\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}) + \mathbf{A}_{2,k}\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}) + \mathbf{A}_{2,k}^*\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}) + o(\mathbf{\Pi}_{2,T}). \tag{4.6.43}$$

Enfin, puisque ces algorithmes ont des performances théoriques identiques, la matrice de covariance asymptotique des estimées de DOA (4.6.41) est dérivée à partir de l'analyse asymptotique de l'algorithme 1 dans l'annexe 4.

On remarque que les termes du second ordre en $\delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T}$ et $\delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T}$ ne sont pas utilisés dans la dérivation de la loi asymptotique de $\theta_{k,T}$ associée à Alg_3 mais, seraient utilisés dans la dérivation de la loi asymptotique des rayons des pôles $r_{k,T}e^{i\theta_{k,T}}$.

Remarque 4.9

1. Dans le cas de signaux sources complexes circulaires, il a été démontré également dans [48, 84] [resp. dans [87]] que les lois asymptotiques des DOA estimées associées aux algorithmes MUSIC standard et root-MUSIC standard [resp. Min Norm standard et root-Min Norm standard] sont identiques.
2. Dans le cas 1, les vecteurs directionnels du modèle étendu dépendent à la fois de θ_k et de ϕ_k. Par conséquent, pour des valeurs des ϕ_k différentes, le rang de la matrice

directionnelle reste égale au nombre de sources si toutes ou quelques valeurs θ_k sont égales.

3. Les variances asymptotiques des DOA estimées données par (4.6.42) dépendent de la matrice $\tilde{\mathbf{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#}$, qui peut s'écrire en fonction des valeurs propres non nulles de la matrice $\tilde{\mathbf{S}}$ où ses valeurs propres dépendent à la fois de séparation angulaire et de séparation de phase de circularité, ce qui explique le comportement des variances asymptotiques des DOA estimées associées aux algorithmes MUSIC non circulaires comparés à l'algorithme MUSIC standard (cf. figure 4.10 et figure 4.11). Plus précisément, nous démontrons dans l'annexe 5 le résultat suivant :

Résultat 4.12 *Dans le cas de deux sources non corrélées de non circularité maximale et de même puissance ($\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$), les valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{S}}$ dépendent à la fois de séparation angulaire $\Delta\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_2 - \theta_1$ et de séparation de phase de non circularité $\Delta\phi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_2 - \phi_1$, et sont données par :*

$$\lambda_k = 2M\sigma_{x_1}^2 \left(1 + (-1)^k \cos((M-1)\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta\phi}{2})\frac{\sin(M\frac{\Delta\theta}{2})}{M\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}\right) \qquad k = 1, 2. \tag{4.6.44}$$

Notons que lorsque $\Delta\theta$ tend vers 0 le terme $\frac{\sin(M\frac{\Delta\theta}{2})}{M\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}$ converge vers 1 et par conséquent, λ_k converge vers $2M\sigma_{x_1}^2(1+(-1)^k\cos(\Delta\phi))$, d'où une valeur finie de la variance (4.6.42) associée aux trois algorithmes étudiés. Cependant, lorsque $\Delta\theta$ et $\Delta\phi$ tendent toutes les deux vers 0, λ_k converge vers 0 ou $4M\sigma_{x_1}^2$ et par conséquent, la variance asymptotique (4.6.42) tend vers l'infini (cf. figures 4.8, 4.10 et 4.11).

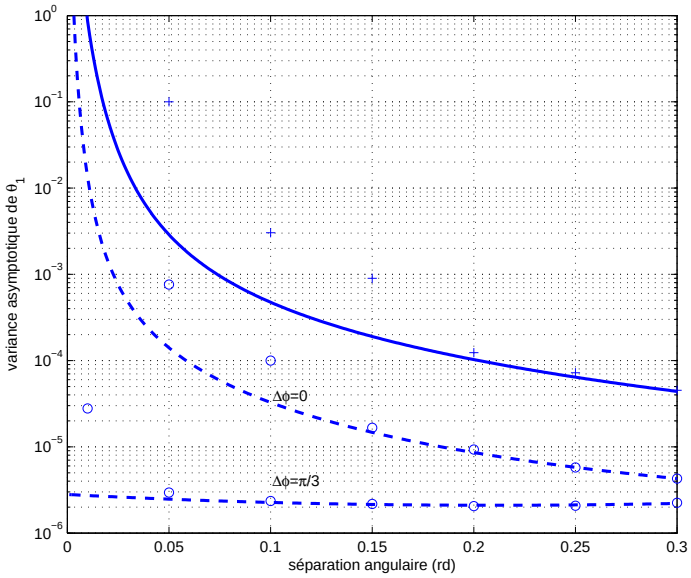

FIG. 4.8 – Variances asymptotiques et estimées (1000 réalisations de Monte Carlo) données par l'algorithme MUSIC standard (—) et l'algorithme 2 (- -) en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour deux valeurs de séparation de phase de non circularité $\Delta\phi$, $M = 6$, SNR= $20dB$ et $T = 500$.

De plus, comme le montre les figures 4.8 et 4.11, la résolution de deux sources proches dépend non seulement de $\Delta\theta$, SNR, T et M mais aussi de $\Delta\phi$. Notons que pour l'algorithme MUSIC standard des expressions analytiques approximées du seuil de résolution de SNR ont été démontrées dans [47, 76, 27] selon des critères de résolution que nous avons rappelé dans le chapitre 6. Ces expressions dépendent en général de $\Delta\theta$, SNR, T, M et du coefficient de corrélation des sources.

Cas d'une seule source

Dans le cas d'une seule source non circulaire de puissance $\sigma_{x_1}^2$ et de non circularité maximale $\rho_1 = 1$, nous démontrons dans l'annexe 6 le résultat suivant :

Résultat 4.13 *La variance asymptotique de la DOA d'une seule source complexe non circulaire est égale à la CRB gaussienne complexe non circulaire (cf. chapitre 5) donnée par :*

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{2\|\mathbf{a}_1\|^2}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right]. \tag{4.6.45}$$

En posant $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} SNR = \frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_n^2}$, nous obtenons la comparaison suivante avec la CRB du cas gaussien circulaire :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}{1 + \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}\right)\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1).$$

Par conséquent

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) & \text{si } \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 \ll 1 \\ \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) & \text{si } \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 \gg 1. \end{cases}$$

Simulations de Monte Carlo et comparaisons numériques

Les performances asymptotiques des trois algorithmes présentés dans ce cas 1, dont la variance asymptotique $\mathrm{Var}(\theta_{1,T})$ est donnée par le résultat 4.11 sont évaluées à travers des simulations de Monte Carlo et des comparaisons numériques de ces algorithmes entre eux et avec l'approche AMV basée seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ (tenant compte de la connaissance a priori de signaux sources non corrélés (cf. remarque 4.3)) présentée dans la section 4.6.2. Nous supposons qu'un réseau linéaire uniforme équidistant de $M = 6$ capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$, reçoit deux sources non corrélées de même puissance ($\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$) émettant des signaux BPSK non filtrés de taux de non circularité maximale ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2 = 1$) et de phase de non circularité ϕ_1 et ϕ_2 avec SNR$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$. La durée d'observation T et le nombre de réalisations I de Monte Carlo sont respectivement de $T = 500$ et $I = 1000$.

Les figures 4.9, 4.10 et 4.11 montrent la dépendance de la variance $\mathrm{Var}(\theta_{1,T})$ associée aux trois algorithmes $\mathrm{Alg}_{1,2,3}$ et l'estimateur AMV basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ avec le SNR, la séparation angulaire et la séparation de phase de circularité.

Les figures 4.9 et 4.10, illustrent le domaine asymptotique des trois algorithmes $\mathrm{Alg}_{1,2,3}$ qui est différent pour chaque algorithme. Notons que l'algorithme Alg_3 surpasse l'algorithme Alg_2

qui surpasse l'algorithme Alg_1 en terme de performances dans la zone non asymptotique, et naturellement tous les trois algorithmes surpassent clairement l'approche AMV basée seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et l'algorithme MUSIC standard. Sur la figure 4.10, la variance asymptotique des algorithmes $\mathrm{Alg}_{1,2,3}$ et la borne AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ tendent vers une limité finie quand la séparation angulaire décroît vers zéro, cela confirme notre explication théorique donnée par le résultat 4.12 et la remarque 4.4.

La figure 4.11 illustre le résultat 4.12, qui montre la sensibilité des performances asymptotiques à la séparation de phase de non circularité telle que les performances se dégradent fortement pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de séparation de phase de non circularité. Par contre pour des grandes valeurs de séparation angulaire, les variances asymptotiques ne se dégradent plus lorsque la séparation de phase de non circularité devient faible (on trouve le cas d'une seule source). De plus, les figures 4.9 et 4.10 mettent en évidence la bonne efficacité des $\mathrm{Alg}_{1,2,3}$ pour des grandes valeurs de SNR et de séparation angulaire si on rapporte leur variance asymptotique à la borne AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ sous condition a priori de non corrélation des sources où les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le modèle 1 défini par la remarque 4.3. Pour éclaircir ce point, la figure 4.12 représente le rapport $\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)/\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_{1,2,3}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour plusieurs valeurs de séparation angulaire. Nous observons que ces trois algorithmes sont efficaces sauf pour des faibles valeurs de SNR et de séparation angulaire.

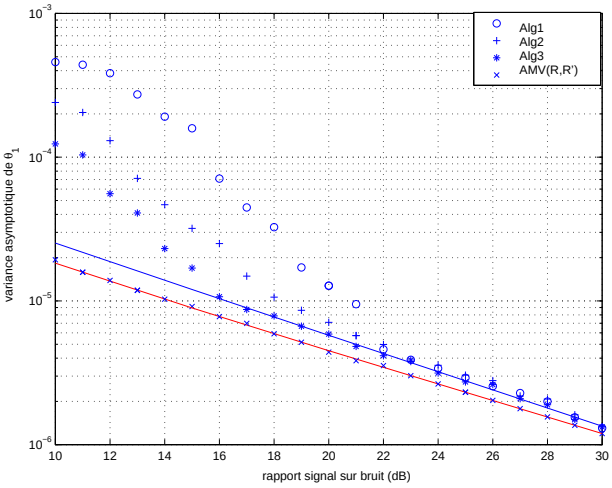

FIG. 4.9 – Variances asymptotiques théoriques et estimées données par les algorithmes 1, 2 ,3 et par l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ en fonction du SNR pour $\Delta\theta = 0.05rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

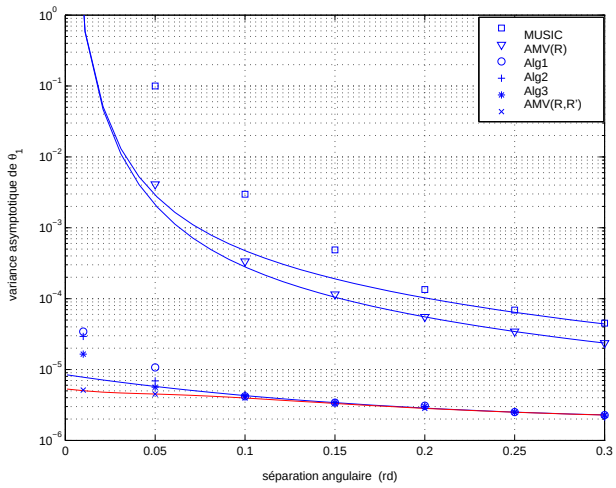

FIG. 4.10 – Variances asymptotiques théoriques et estimées données par les algorithmes 1, 2 ,3, MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et par l'approche AMV basée seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ en fonction de séparation angulaire pour un SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

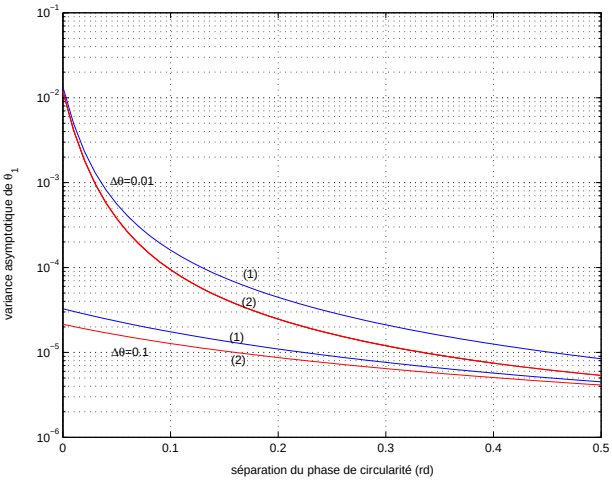

FIG. 4.11 – Variances asymptotiques théoriques données par les algorithmes 1, 2 ,3 (1) et par l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ (2) en fonction de séparation de phase de non circularité pour deux valeurs de séparation angulaire et un SNR= $20dB$.

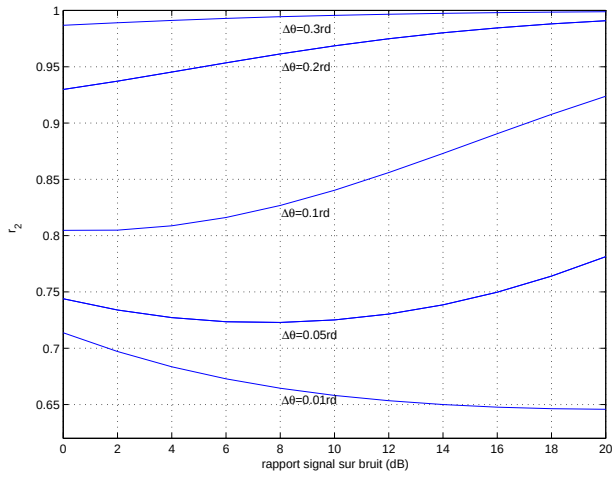

FIG. 4.12 – $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_{1,2,3}}(\theta_1)}$ en fonction du SNR pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour $\Delta\phi = \pi/6rd$.

Cas 2 : sources corrélées ou non de non circularité non maximale

Dans cette section, nous étudions les performances asymptotiques des algorithmes 4 et 5, en adoptant la même procédure d'analyse utilisée que dans le cas 1. La matrice de covariance asymptotique des estimées de DOA associée à l'algorithme 4 est donnée par le résultat suivant prouvé dans l'annexe 7 :

Résultat 4.14 *La suite de statistique* $\sqrt{T}(\boldsymbol{\theta}_T - \boldsymbol{\theta})$ *associée à l'algorithme 4 converge en loi vers une loi gaussienne centrée dont la matrice de covariance est donnée par l'expression suivante :*

$$\left(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{Alg}_4}\right)_{k,l} = \frac{2}{\alpha_k \alpha_l} \Re\left(\left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{U}_1^* \mathbf{a}_l^*\right)\left(\mathbf{a}_k^{'H} \mathbf{\Pi}_y \mathbf{a}_l^{'}\right)\right),$$

où la matrice $\mathbf{U}_1$ *est définie à partir de* $\tilde{\mathbf{U}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \end{pmatrix}$.

Dans le cas particulier d'une seule source non circulaire de non circularité non maximale l'équation (4.6.46) *devient :*

$$C_{\theta_1}^{\mathrm{Alg}_4} = \frac{1}{\alpha_1(1-\rho_1^2)}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}\frac{(1+\rho_1^2)}{(1-\rho_1^2)}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right],$$

et par conséquent

$$C_{\theta_1}^{\mathrm{Alg}_4}(\theta_1) \geq \mathrm{CRB}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right] \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\rho_1 \to 1} C_{\theta_1}^{\mathrm{Alg}_4}(\theta_1) = \infty. \quad (4.6.46)$$

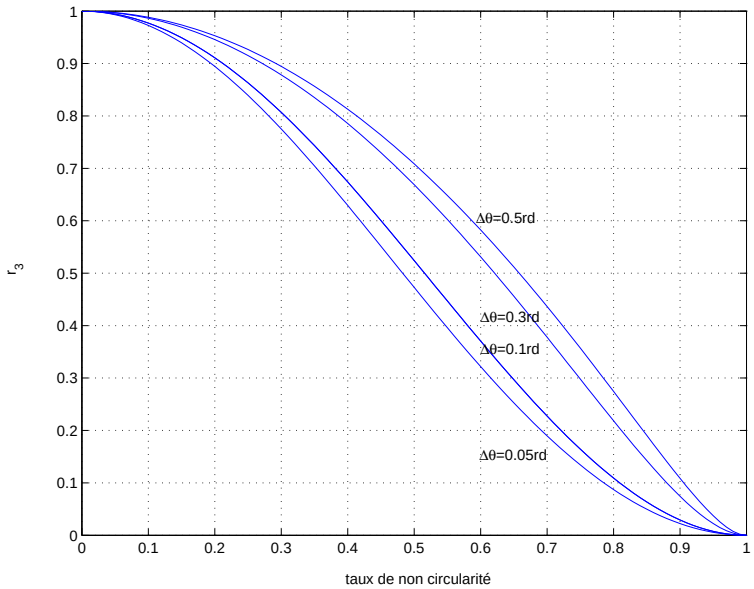

FIG. 4.13 – $r_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{MUSIC}(R)}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_4}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire avec $\alpha = \pi/2$, SNR= $5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

Remarque 4.10
Les performances désastreuses (cf. figure 4.13) de l'algorithme 4 s'interprètent de la façon suivante, d'une manière générale puisque $\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}^{\#}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#}$ avec $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H$, $\tilde{\mathbf{S}}$ approchera la singularité avec la singularité de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$. C'est le cas par exemple pour une seule source quand son taux de non circularité ρ_1 tend vers 1. Pour plusieurs sources non corrélées, c'est le cas quand au moins une des deux sources a son taux de non circularité qui tend vers 1 (puisque dans ce cas, $\det(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = \prod_{k=1}^{K}\left(\sigma_{x_k}^4(1-\rho_k^2)\right)$). En conséquence, la deuxième égalité (4.6.46) s'étend par calcul numérique dans le cas de plusieurs sources comme le montre la figure 4.13 dans tous les scénarios.

L'introduction de la pondération dans l'algorithme 5 permet d'améliorer la performance de l'algorithme 4. Nous démontrons en annexe 8 le résultat suivant :

Résultat 4.15 *La suite de statistique $\sqrt{T}(\boldsymbol{\theta}_T - \boldsymbol{\theta})$ associée à l'algorithme 5 converge en loi vers une loi gaussienne centrée dont la matrice de covariance est donnée par l'expression suivante :*

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(z))_{k,l} = \frac{1}{2\alpha_k\alpha_l}(1\ z^*\ z\ 1)\left((\bar{\mathbf{A}}_k^T\tilde{\mathbf{U}}^*\bar{\mathbf{A}}_l^*)\otimes(\bar{\mathbf{A}}'^H_k\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}'_l) + (\bar{\mathbf{A}}'^T_k\boldsymbol{\Pi}^*_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}'^*_l)\otimes(\bar{\mathbf{A}}_k^H\tilde{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{A}}_l)\right)(1\ z^*\ z\ 1)^H, \tag{4.6.47}$$

avec $z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2w^*_{1,2}}{w_{1,1}+w_{2,2}}$. De plus, la valeur optimale z_k^{opt} qui minimise $(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,k}$ est donnée par :

$$z_k^{\text{opt}} = -\frac{\mathbf{a}_k^T\mathbf{U}_2^*\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_k^H\mathbf{U}_1\mathbf{a}_k},$$

et la variance optimale associée est donnée par :

$$\text{Var}(\theta_k) = \min_z (\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(z))_{k,k} = \left(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(z_k^{\text{opt}})\right)_{k,k} = \frac{\text{Det}(\bar{\mathbf{A}}_k^H\tilde{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{A}}_k)}{2(\mathbf{a}_k^H\mathbf{U}_1\mathbf{a}_k)(\mathbf{a}'^H_k\boldsymbol{\Pi}_1\mathbf{a}'_k)}. \tag{4.6.48}$$

Remarque 4.11
Notons remarquons que l'algorithme MUSIC pondéré ne peut pas s'implémenter directement car la valeur optimale z_k^{opt} dépend des quantités inconnues $\{(\theta_k)_{k,\ldots,K}, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1, \sigma_n^2\}$. Dans l'implémentation de cet algorithme, les quantités précédentes doivent être remplacées par des estimées consistantes, après initialisation de ces estimées. Nous notons que ces estimées consistantes n'ont aucun effet sur la variance asymptotique comme nous le démontrons dans l'annexe 8. De plus puisque z_k^{opt} dépend de k, ceci implique que la valeur z_k^{opt} qui minimise la variance $\text{Var}(\theta_k)$ ne minimise pas nécessairement la variance $\text{Var}(\theta_j)$ pour $j \neq k$, contrairement à l'algorithme MUSIC standard où chaque estimée de DOA, $\theta_{k,T}$, est obtenue indépendamment des autres DOA estimées, $(\theta_{j,T})_{j\neq k}$ (nous ne considérons pas ici l'algorithme MUSIC séquentiel).

Implémentation de l'algorithme 5 : L'algorithme 5 est implémenté en deux étapes comme dans [108, Section 7] :

1. Des estimées initiales de DOA $(\theta_k)_{k=1,\ldots,K}$ sont obtenues par l'algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$.
2. Pour $k = 1, ..., K$, nous effectuons les procédures suivantes : Soit $\theta^0_{k,T}$ désigne une estimée de θ_k obtenue dans l'étape 1. En utilisant $(\theta^0_{k,T})_{k=1,\ldots,K}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ pour calculer des estimées consistantes $\mathbf{U}_{1,T}$ et $\mathbf{U}_{2,T}$ de $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$, par conséquent une estimée consistante $z_{k,T}$ de z_k^{opt}. En remplaçant z_k par $z_{k,T}$ dans la fonction du coût (4.5.16), une estimée améliorant $\theta^1_{k,T}$ est obtenue en minimisant cette fonction du coût au voisinage de $\theta^0_{k,T}$.

Remarque 4.12
Dans le cas de signaux sources complexes circulaires au second ordre, $\mathbf{R}'_y = \mathbf{O}$, alors $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ est diagonale par bloc. Et par conséquent, les matrices suivantes $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\mathbf{S}}^{\#}$ et $\tilde{\mathbf{U}}$ sont diagonales par bloc. Ce qui implique, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{O}$ et $z_k^{\text{opt}} = 0$, par conséquent $\mathbf{W}_{\text{opt}}$ est diagonale et, l'algorithme 5 est réduit à l'algorithme MUSIC standard où (4.6.48) devient $\min_z (\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,k} = \frac{\mathbf{a}_k^H \mathbf{U} \mathbf{a}_k}{2\mathbf{a}'^H_k \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'_k}$, qui est la variance asymptotique donnée par (4.6.32).

Cas d'une seule source
Dans ce cas, l'algorithme 5 est asymptotiquement efficace et, nous démontrons dans l'annexe 9 le résultat suivant :

Résultat 4.16 *La variance asymptotique de la DOA associée à l'algorithme 5 est égale à la borne de CRB gaussienne non circulaire (cf. Résultat 5.4) pour toutes les valeurs de taux de non circularité.*

Simulations de Monte Carlo et comparaisons numériques
Les performances asymptotiques de l'algorithme 5 sont illustrées grâce à des simulations de Monte Carlo et des comparaisons numériques en terme de variance asymptotique avec l'algorithme MUSIC standard et l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ sans connaissance a priori sur la corrélation des sources et sur leur taux de non circularité.
Dans les figures présentées dans ce paragraphe, nous considérons deux sources de même puissance ($\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2}$) émettant des signaux BPSK filtrés de même taux de non circularité ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2$) et de phase de non circularité ϕ_1 et ϕ_2 avec SNR$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}$. Ces signaux rayonnent sur un réseau linéaire équidistant de $M = 6$ capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$. Nous supposons que ces signaux proviennent de deux trajets multiples de DOA θ_1 et θ_2. Nous choisissons le capteur 1 comme référence nous avons :

$$\begin{aligned} x_{t,1} &= \bar{x}_{t,1} \\ x_{t,2} &= \cos(\alpha)\bar{x}_{t,1} + \sin(\alpha)\bar{x}_{t,2}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{R}_{\bar{x}} = \sigma^2 \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{R}'_{\bar{x}} = \sigma^2 \rho \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{R}_x = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R}'_x = \sigma^2 \rho \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & \cos(\alpha) e^{i\phi_1} \\ \cos(\alpha) e^{i\phi_1} & \cos^2(\alpha) e^{i\phi_1} + \sin^2(\alpha) e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.$$

La durée d'observation T et le nombre de réalisations I de Monte Carlo sont respectivement de $T = 1000$ et $I = 1000$.

La figure 4.14 montre que lorsque le taux de non circularité augmente, les performances asymptotiques de l'algorithme MUSIC pondéré se dégradent fortement quand les sources sont corrélées comparé à l'algorithme MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ dont les performances se dégradent également de plus en plus quand les sources sont fortement corrélées et dans le cas cohérentes (i.e., $\alpha \approx 0$) [102]. Par contre, dans le cas de sources non corrélées (i.e., $\alpha = \pi/2$), les figures 4.15 et 4.16 montrent que l'algorithme MUSIC pondéré améliore les performances de l'algorithme MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$, particulièrement pour des faibles valeurs de SNR et de séparation angulaire quand le taux de non circularité augmente.

La figure 4.17 compare en terme de rapport la variance de l'algorithme MUSIC pondéré et la variance asymptotique donnée par l'approche AMV basée sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ en tenant compte de la connaissance a priori de sources non corrélées (i.e., $\alpha = \pi/2$) où les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le modèle 2 défini par la remarque 4.3. Sur cette figure, nous observons que l'algorithme 5 est efficace pour des grandes valeurs de SNR et de séparation angulaire quand le taux de non circularité augmente.

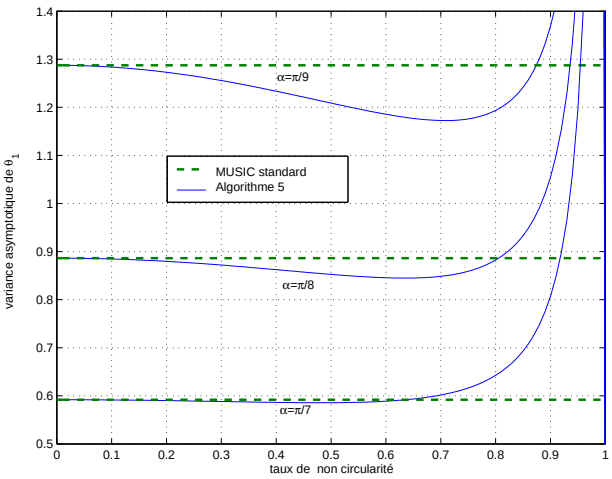

FIG. 4.14 – Variances asymptotiques théoriques associées aux algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et l'algorithme MUSIC pondéré (Alg_5) en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de α avec $\Delta\theta = 0.1rd$ et SNR= $20dB$.

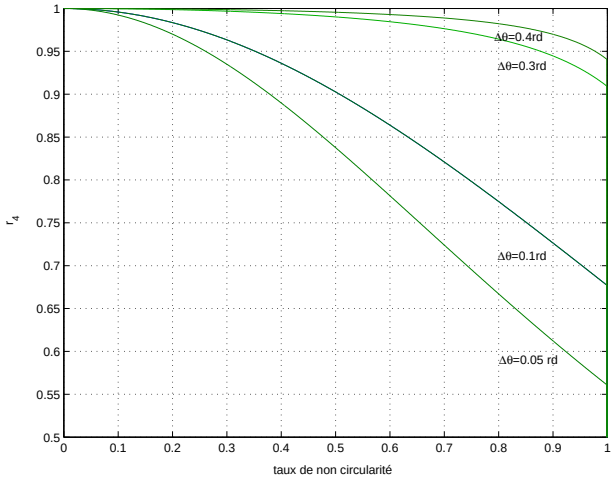

FIG. 4.15 – $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_5}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{MUSIC}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire avec $\alpha = \pi/2$ et SNR= $5dB$.

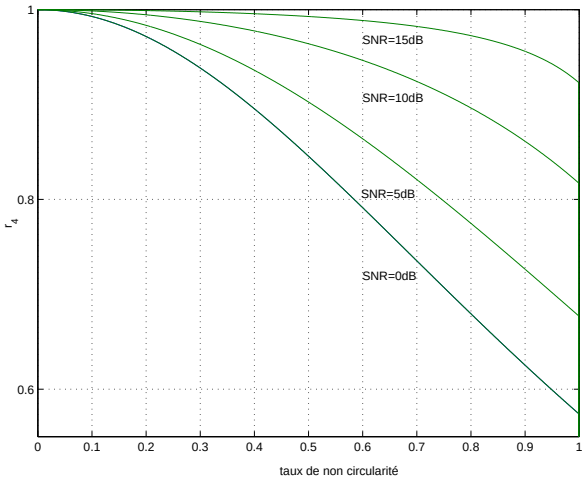

FIG. 4.16 – $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_5}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{MUSIC}(R)}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour trois valeurs du SNR avec $\alpha = \pi/2$, $\Delta\theta = 0.1rd$.

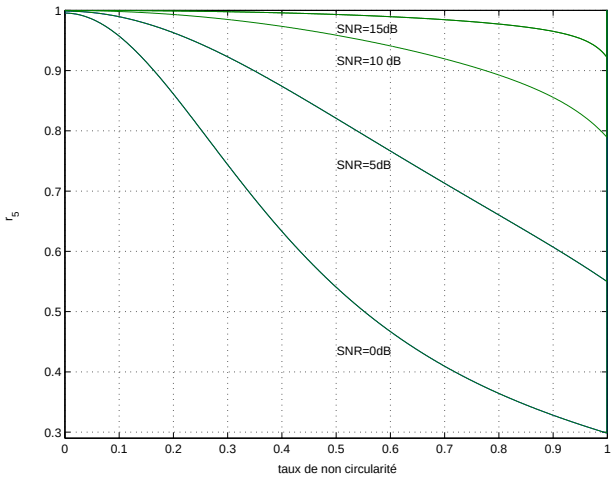

FIG. 4.17 – $r_5 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Var}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\mathrm{Var}^{\mathrm{Alg}_5}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs du SNR avec $\alpha = \pi/2$, $\Delta\theta = 0.1rd$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

	MUSIC standard		Algorithme 5	
SNR(dB)	EQM estimée	variance théorique	EQM estimée	variance théorique
6	$4.452.10^{-3}$	$4.589.10^{-4}$	$3.154.10^{-4}$	$4.151.10^{-4}$
8	$1.600.10^{-3}$	$2.604.10^{-4}$	$2.344.10^{-4}$	$2.449.10^{-4}$
10	$2.899.10^{-4}$	$1.527.10^{-4}$	$1.561.10^{-4}$	$1.474.10^{-5}$
20	$1.338.10^{-5}$	$1.348.10^{-5}$	$1.337.10^{-5}$	$1.347.10^{-5}$

TAB. 4.1 – Variances théoriques et erreur quadratique moyenne estimée donnée par l'algorithme 5 pour $\Delta\theta = 0.2rd$

	MUSIC standard		Algorithme 5	
	EQM estimée	variance théorique	EQM estimée	variance théorique
θ_1	$1.600.10^{-3}$	$2.604.10^{-4}$	$2.344.10^{-4}$	$2.449.10^{-4}$
θ_2	$1.800.10^{-3}$	$2.604.10^{-4}$	$2.457.10^{-4}$	$2.449.10^{-4}$

TAB. 4.2 – Variances théoriques et erreur quadratique moyenne estimée donnée par l'algorithme 5 pour $\Delta\theta = 0.2rd$ and $SNR = 8dB$

Les tableaux 1 et 2 comparent les variances asymptotiques données par nos expressions théoriques avec les erreurs quadratiques moyennes estimées obtenues à partir des simulations de Monte Carlo associées aux algorithmes 5 et MUSIC standard basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ pour $\rho = 0.9$. Nous voyons qu'il y a un accord entre les résultats théoriques et empiriques au delà d'un seuil de SNR. Au-dessous de ce seuil, l'algorithme 5 surpasse largement l'algorithme MUSIC standard.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir rappelé brièvement les algorithmes sous espaces présentés dans la littérature, nous avons proposé d'autres algorithmes sous espaces sous différentes connaissances a priori sur les signaux sources. Ensuite, nous avons adopté une méthodologie générale d'analyse de performance asymptotique des algorithmes sous espaces arbitraires, qui nous permet de donner, des expressions explicites des matrices de covariances asymptotiques des matrices estimées des projecteurs orthogonaux associés aux sous espaces bruit des matrices de covariances spatiales estimées des modèles standard et étendu. A partir de ces expressions, des expressions explicites des matrices de covariance des estimées de DOA associées aux algorithmes présentés sont déduites grâce à une approche fonctionnelle.
Dans le cas de sources non corrélées complexes non circulaires des taux de non circularité maximale (cas 1), nous avons démontré que la matrice de covariance des DOA estimées est la même pour les trois algorithmes bien que leurs performances asymptotiques aient des comportements différents en dehors du régime asymptotique. De plus, ces trois algorithmes

sont asymptotiquement efficaces (comparés à la borne AMV sous condition de connaissance a priori de sources non corrélées) pour des grandes valeurs des SNR, des séparations angulaires et des séparations de phase de non circularité dont les performances asymptotiques surpassent largement celles de l'algorithme MUSIC standard qui n'est asymptotiquement efficace que lorsque les SNR tendent vers l'infini pour plusieurs sources.
Dans le cas de sources corrélées ou non des taux de non circularité non maximale (cas 2), nous avons démontré une expression de la matrice de covariance asymptotique des DOA estimées associée à l'algorithme MUSIC pondéré proposé dans ce cas. Les performances de cet algorithme n'améliorent celles de l'algorithme MUSIC standard que dans le cas de sources non corrélées (au sens réel) de circularité quelconque pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de SNR où son efficacité (au sens de la borne AMV) décroît dans ces circonstances.
Dans le cas d'une seule source gaussienne complexe, les algorithmes présentés dans le cas 1 et l'algorithme MUSIC pondéré sont efficaces respectivement dans le cas de taux de non circularité maximale et de taux de non circularité quelconque.
De plus, nous avons démontré que dans le cas des sources complexes circulaires ou non circulaires, les performances asymptotiques de tout algorithme du second ordre basé seulement sur la première matrice de covariance sont identiques à celles du cas des observations gaussiennes complexes circulaires et les performances des algorithmes sous espaces basés sur la matrice de covariance étendue dépendent uniquement des moments d'ordre 2 des sources, donc sont celles du cas gaussien de même non circularité.
D'après ces résultats asymptotiques et puisque les performances asymptotiques de l'algorithme MUSIC pondéré de recherche monodimensionnel proposé dans le cas 2 restent très limitées comparées à l'algorithme MUSIC standard, nous proposerons dans le chapitre 7, des algorithmes AMV du second ordre asymptotiquement efficaces (au sens CRB) basés sur différents projecteurs orthogonaux empiriques qui exploitent d'une façon optimale l'information contenue dans la seconde matrice de covariance.

Annexes

Annexe 1 : Preuve du Résultat 4.4

Puisque $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ sont respectivement des projecteurs orthogonaux sur le sous espace bruit des matrices hermitiennes $\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{R}'^{H}_{y,T}$ et $\mathbf{R}_{y,T}$, les erreurs d'estimations $\delta\mathbf{R}_{y,T} = \mathbf{R}_{y,T} - \mathbf{R}_y$ et $\delta\mathbf{R}'_{y,T} = \mathbf{R}'_{y,T} - \mathbf{R}'_y$ dus à un nombre fini T d'observations, sont reliées aux erreurs $\delta\mathbf{\Pi}_{y,T} = \mathbf{\Pi}_{y,T} - \mathbf{\Pi}_y$ et $\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T} = \mathbf{\Pi}'_{y,T} - \mathbf{\Pi}'_y$ grâce au résultat standard de perturbation sur les projecteurs orthogonaux associés à des sous espace invariants des matrices hermitiennes (cf. théorème 4.1) où $\mathbf{A}$ est remplacée par $\mathbf{R}_y$ ou $\mathbf{R}'_y\mathbf{R}'^{H}_y$ et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{\Pi}_{y,T} &= \mathbf{\Pi}_y\delta\mathbf{R}_{y,T}\mathbf{R}_s^{\#} + \mathbf{R}_s^{\#}\delta\mathbf{R}_{y,T}\mathbf{\Pi}_y + o(\delta\mathbf{R}_{y,T}) \\
\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T} &= -\mathbf{\Pi}'_y\delta(\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{R}'^{H}_{y,T})(\mathbf{R}'_y\mathbf{R}'^{H}_y)^{\#} - (\mathbf{R}'_y\mathbf{R}'^{H}_y)^{\#}\delta(\mathbf{R}'_y\mathbf{R}'^{H}_y)\mathbf{\Pi}'_y + o(\delta(\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{R}'^{H}_{y,T})).
\end{aligned}$$

En utilisant $\delta(\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{R}'^{H}_{y,T}) = \delta(\mathbf{R}'_{y,T})\mathbf{R}'^{H}_y + \mathbf{R}'_y\delta(\mathbf{R}'^{H}_{y,T}) + o(\delta(\mathbf{R}'_y))$, $\mathbf{\Pi}'_y\mathbf{R}'_y = \mathbf{O}$ et $\mathbf{R}'^{H}_y(\mathbf{R}'_y\mathbf{R}'^{H}_y)^{\#} = \mathbf{R}'^{\#}_y$, et l'identité (1.1.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}) &= -((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}^{\#}) + (\mathbf{S}^{*\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y))\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T}) + o(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T})) \\
\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T}) &= (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}'^{*\#})\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'^{*}_{y,T}) - (\mathbf{S}'^{\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y)\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'_{y,T}) + o(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'_{y,T})).
\end{aligned}$$

Où $\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T})$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T}) = \begin{pmatrix} \mathbf{S}'^{\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}'^{*\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'_{y,T}) \\ \mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'^{*}_{y,T}) \end{pmatrix} + o(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}'_{y,T})),$$

et grâce au théorème de continuité 4.2, nous déduisons que les statistiques $\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T})$ et $\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}, \delta\mathbf{\Pi}'_{y,T})$ sont asymptotiquement gaussiennes dont les premières matrices de covariance sont données respectivement par :

$$\mathbf{C}_{\Pi} = \Big((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}^{\#}) + (\mathbf{S}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_y)\Big)\,\mathbf{C}_{r_y}\,\Big((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}^{\#}) + (\mathbf{S}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_y)\Big) \tag{4.7.49}$$

$$\mathbf{C}_{\Pi'} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}'^{\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{\Pi}_y{}^* \otimes \mathbf{S}'^{*\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{r'_y} & \mathbf{C}'_{r'_y} \\ \mathbf{C}'_{r'_y}{}^{*} & \mathbf{C}^{*}_{r'_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}'^{*\#}_y \otimes \mathbf{\Pi}'_y \\ \mathbf{\Pi}'^{*}_y \otimes \mathbf{R}'^{\#}_y \end{pmatrix}, \tag{4.7.50}$$

où les expressions de $\mathbf{C}_{r_y} = \mathrm{E}\left(\mathbf{y}_t^* \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_y))(\mathbf{y}_t^* \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}_y))^H\right)$, $\mathbf{C}_{r'_y} = \mathrm{E}\left(\mathbf{y}_t \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}'_y))(\mathbf{y}_t \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}'_y))^H\right)$ et $\mathbf{C}'_{r'_y} = \mathrm{E}\left(\mathbf{y}_t \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}'_y))(\mathbf{y}_t \otimes \mathbf{y}_t - \mathrm{vec}(\mathbf{R}'_y))^T\right)$ sont données dans la section 4.6.2. Insérant ces expressions dans (4.7.50) et (4.7.49), et en utilisant $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $\mathbf{R}'^{\#}_y\mathbf{R}_y\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O}$ et l'identité (1.1.15), le terme suivant disparaît dans le calcul

$$\Big((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{S}^{\#}) + (\mathbf{S}^{\#*} \otimes \mathbf{\Pi}_y)\Big)\,(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}) = \mathbf{O}, \tag{4.7.51}$$

et ensuite nous obtenons après des manipulations algébriques les expressions (4.6.30) et (4.6.31).

Annexe 2 : Preuve des Résultats 4.5 et 4.6

Notons que la fonction $g_T(\theta)$ donnée par l'équation (4.4.2) peut s'écrire sous la forme

$$g_T(\theta) = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{y,T}\mathbf{M}(\theta)),$$

avec $\mathbf{M}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}(\theta)^H$. Puisque le minimum local $\theta_{k,T} = \theta_k + \delta\theta_{k,T}$ de $g_T(\theta)$, vérifie la condition nécessaire suivante :

$$\frac{\partial g_T(\theta)}{\partial \theta}_{|\theta=\theta_{k,T}=\theta_k+\delta\theta_{k,T}} = 0 = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_T\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T})), \tag{4.7.52}$$

avec $\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T}) = \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta}_{|\theta=\theta_{k,T}}$. Afin de trouver la matrice Jacobienne de l'algorithme MUSIC considéré comme une extension de l'application $\mathbf{\Pi}_{y,T} \to \theta_{k,T}$ de l'application $\mathbf{\Pi}_y \to \theta_k$, nous utilisons le développement limité à l'ordre 1 de $\mathbf{M}^{'}$ au voisinage de θ_k donné par :

$$\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T}) = \mathbf{M}_k^{'} + \mathbf{M}_k^{''}\delta\theta_{k,T} + o(\delta\theta_{k,T}),$$

avec $\mathbf{M}_k^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta}_{|\theta=\theta_k}$ et $\mathbf{M}_k^{''} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\mathbf{M}(\theta)}{d^2\theta}_{|\theta=\theta_k}$, l'équation (4.7.52) devient :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Tr}((\mathbf{\Pi}_y + \delta\mathbf{\Pi}_{y,T})(\mathbf{M}_k^{'} + \mathbf{M}_k^{''}\delta\theta_{k,T} + o(\delta\theta_{k,T}))) &= \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}\mathbf{M}_k^{'}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_y\mathbf{M}_k^{''})\delta\theta_{k,T} \\ &+ o(\delta\mathbf{\Pi}_{k,T}). \end{aligned}$$

D'où

$$\delta\theta_{k,T} = \mathbf{d}_k^T\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}),$$

où $\mathbf{d}_k^T \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha_k}(\mathbf{a}_k^{'T} \otimes \mathbf{a}_k^H + \mathbf{a}_k^T \otimes \mathbf{a}_k^{'H})$ et où $\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_y\mathbf{M}_k^{''}) = 2\mathbf{a}_k^{'H}\mathbf{\Pi}_y\mathbf{a}_k^{'}$.
En appliquant le théorème 4.2, nous déduisons que la loi asymptotique de la distribution $\boldsymbol{\theta}_T$ des estimées de DOA obtenue par l'algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ est gaussienne centrée de matrice de covariance donnée par :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{C}_{\Pi}(\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}})^H \text{ où } \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_K^T, \end{pmatrix}, \tag{4.7.53}$$

où $\mathbf{C}_{\Pi}$ est donnée par l'équation (4.6.30). En utilisant la propriété d'orthogonalité entre les vecteurs directionnels et le sous espace bruit, i.e., $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, on obtient après quelques manipulations algébriques simples, l'égalité (4.6.32). Nous adoptons par la même procédure en partant de (4.4.3), nous obtenons la même relation (4.7.53) où $\mathbf{C}_{\Pi}$ est remplacée par $\mathbf{C}_{\Pi'}$. D'où l'expression similaire de la matrice de covariance des estimées de DOA obtenues en utilisant l'algorithme MUSIC basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}^{'}$. Dans le cas particulier d'une source, nous obtenons :

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma_n^2(\sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_{x_1}^4\|\mathbf{a}_1\|^6}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^H \text{ et } \mathbf{U}^{'} = \frac{\sigma_n^2(\sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_{x_1}^4\rho_1^2\|\mathbf{a}_1\|^6}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^H.$$

En substituant ces expressions dans (4.6.32), on trouve les deux expressions (4.6.33) des variances asymptotiques C_{θ_1}.

Annexe 3 : Preuve du Résultat 4.9

Nous notons tout d'abord que la statistique $\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{1,T} - \mathbf{\Pi}_1) \\ \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{2,T} - \mathbf{\Pi}_2) \\ \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}^*_{2,T} - \mathbf{\Pi}^*_2) \end{pmatrix}$ peut être déduite de la statistique $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$ et grâce au théorème de continuité, cette statistique est asymptotiquement gaussienne centrée de matrice de covariance

$$\mathbf{C}_{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_2^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_1} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_2} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*} \end{pmatrix},$$

dont les termes peuvent être déduits à partir de l'expression de la première matrice de covariance de la loi asymptotique de $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$ donnée par :

$$\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_1,\Pi_1^*} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}^*_{\Pi_2,\Pi_1} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}_{\Pi_2} & \mathbf{C}^*_{\Pi_2^*,\Pi_1} \\ \mathbf{C}^H_{\Pi_1,\Pi_1^*} & \mathbf{C}^T_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^T_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_1^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}^T \end{pmatrix}, \tag{4.7.54}$$

où $\mathbf{G}$ est une matrice de permutation par bloc définie par $\mathrm{vec}\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \mathbf{G}\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{A}) \\ \mathrm{vec}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}$.

Avec l'expression (4.7.54) et (4.6.38) de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_1,\Pi_1^*} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*} & \mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}^*_{\Pi_2,\Pi_1} \\ \mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^H_{\Pi_2^*,\Pi_2} & \mathbf{C}_{\Pi_2} & \mathbf{C}^*_{\Pi_2^*,\Pi_1} \\ \mathbf{C}^H_{\Pi_1,\Pi_1^*} & \mathbf{C}^T_{\Pi_2,\Pi_1} & \mathbf{C}^T_{\Pi_2^*,\Pi_1} & \mathbf{C}_{\Pi_1^*} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^* & \mathbf{\Pi}_2^* \\ \mathbf{\Pi}_2 & \mathbf{\Pi}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^* & \mathbf{U}_2^* \\ \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_2 \\ \mathbf{\Pi}_2^* & \mathbf{\Pi}_1^* \end{bmatrix} \right. \\ &+\mathbf{K}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_2 & \mathbf{\Pi}_1 \\ \mathbf{\Pi}_1^* & \mathbf{\Pi}_2^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^* \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \right) + \mathbf{K}\left(\left. \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1^* & \mathbf{U}_2^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_2^* & \mathbf{\Pi}_1^* \\ \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{\Pi}_2 \end{bmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.7.55}$$

Donc, en utilisant l'identité suivante déduite à partir des définitions des matrices de permutation $\mathbf{G}$ et $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{2M}\sum_{j=1}^{2M}(\mathbf{e}_{i,2M}\mathbf{e}^T_{j,2M} \otimes \mathbf{e}_{j,2M}\mathbf{e}^T_{i,2M})$ pour des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ de dimension $M \times M$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^* & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^* & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}\otimes\mathbf{C} & \mathbf{A}\otimes\mathbf{D} & \mathbf{B}\otimes\mathbf{C} & \mathbf{B}\otimes\mathbf{D} \\ \mathbf{A}\otimes\mathbf{D}^* & \mathbf{A}\otimes\mathbf{C}^* & \mathbf{B}\otimes\mathbf{D}^* & \mathbf{B}\otimes\mathbf{C}^* \\ \mathbf{B}^*\otimes\mathbf{C} & \mathbf{B}^*\otimes\mathbf{D} & \mathbf{A}^*\otimes\mathbf{C} & \mathbf{A}^*\otimes\mathbf{D} \\ \mathbf{B}^*\otimes\mathbf{D}^* & \mathbf{B}^*\otimes\mathbf{C}^* & \mathbf{A}^*\otimes\mathbf{D}^* & \mathbf{A}^*\otimes\mathbf{C}^* \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}^T \end{pmatrix} \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, en utilisant ces deux identités dans (4.7.55), et après des manipulations algébriques simples, les expressions $\mathbf{C}_{\Pi_1}$, $\mathbf{C}_{\Pi_2}$, $\mathbf{C}_{\Pi_2,\Pi_1}$, $\mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_1}$ et $\mathbf{C}_{\Pi_2^*,\Pi_2}$ sont déduites après identification.

Annexe 4 : Preuve du Résultat 4.11

Nous montrons tout d'abord que l'algorithme 2 et 3 satisfont la même équation de perturbation (4.6.43). Pour l'algorithme 2, en utilisant les propriétés de l'opérateur Tr(.), la fonction $g_{2,T}(\theta)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g_{2,T}(\theta) = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(\theta)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(\theta)) - \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{2,T}^H\mathbf{M}(\theta)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}^*(\theta)),$$

avec $\mathbf{M}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$. Puisque $\theta_{k,T}$ est un minimum local de $g_{2,T}(\theta)$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{2,T}(\theta)}{\partial \theta}_{|\theta=\theta_{k,T}=\theta_k+\delta\theta_{k,T}} &= 0 \\ &= 2\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T})\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(\theta_{k,T})\right) \\ &- 2\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T})\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}^*(\theta_{k,T})\right)\right], \end{aligned} \tag{4.7.56}$$

avec $\mathbf{M}^{'}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{M}(\theta)}{d\theta}$. Moyennant un calcul de perturbation, en remplaçant $\mathbf{\Pi}_{1,T} = \mathbf{\Pi}_1 + \delta\mathbf{\Pi}_{1,T}$, $\mathbf{\Pi}_{2,T} = \mathbf{\Pi}_2 + \delta\mathbf{\Pi}_{2,T}$, $\mathbf{M}(\theta_{k,T}) = \mathbf{M}_k + \mathbf{M}_k^{'}\delta\theta_{k,T} + o(\delta\theta_{k,T})$ et $\mathbf{M}^{'}(\theta_{k,T}) = \mathbf{M}_k^{'} + \mathbf{M}_k^{''}\delta\theta_{k,T} + o(\delta\theta_{k,T})$ dans (4.7.56), nous obtenons l'équation suivante en ne gardant dans (4.7.56) que les termes de premier ordre en $\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}$, $\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}$ et $\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*$:

$$\begin{aligned} &\Big[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\right) - \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*\right)\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\right) - \\ &\qquad \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}\right)\right)\Big]\,\delta\theta_{k,T} \\ &= \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*\right)\right) + \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^*\right)\right) \\ &- \mathrm{Tr}\left(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\right) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}) + o(\mathbf{\Pi}_{2,T}), \end{aligned} \tag{4.7.57}$$

où $\mathbf{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}(\theta_k)$, $\mathbf{M}_k^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}^{'}(\theta_k)$ et $\mathbf{M}_k^{''} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\mathbf{M}(\alpha)}{d\alpha^2}_{|\alpha=\theta_k}$. Grâce à l'identité $\tilde{\mathbf{\Pi}}\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}$, qui est équivalente à $\mathbf{\Pi}_1\mathbf{a}_k + e^{-i\phi_k}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{a}_k^* = \mathbf{0}$, nous avons

$$\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*\mathbf{\Pi}_2^*. \tag{4.7.58}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\right) - \Re\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*\right)\right) = \Re\left(\mathrm{Tr}\left((\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*\mathbf{\Pi}_2^*)\mathbf{M}_k^{''}\right)\right) = 0.$$

Ainsi (4.7.57) devient pour l'algorithme 2 :

$$\delta\theta_{k,T} = \frac{\Re\left(\mathrm{Tr}\left(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^{*}\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{*}+\mathbf{\Pi}_2^{*}\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^{*}\right)\right)-\mathrm{Tr}\left(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k+\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\right)}{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\right)-\Re\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_2^{*}\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}\right)\right)} + o(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}). \tag{4.7.59}$$

Les estimées de DOA fournies par l'algorithme 3 sont obtenues grâce à des racines du polynôme $\mathrm{g}_{3,T}(z)$ qui peut s'écrire sous la forme suivant :

$$g_{3,T}(z_k) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(z_k)\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(z_k)\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{2,T}^{*}\mathbf{M}(z_k)\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}(z_k^{-1})\right), \tag{4.7.60}$$

avec $z = z_k = \exp(i\theta_k)$ et $\mathbf{M}(z_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(z_k)\mathbf{a}^T(z_k^{-1})$. Par définition de l'algorithme 3 (cf. (4.5.13)), $z_{k,T} = r_{k,T}e^{i\theta_{k,T}} = z_k + \delta z_{k,T} = e^{i\theta_k} + \delta z_{k,T}$ est solution de

$$g_{3,T}(z_{k,T}) = 0 = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(z_{k,T})\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}(z_{k,T})\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}_{2,T}^{*}\mathbf{M}(z_{k,T})\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}(z_{k,T}^{-1})\right).$$

Puisque les termes de premier ordre en $\delta r_{k,T}$ et $\delta\theta_{k,T}$ disparaissent dans l'analyse asymptotique de l'algorithme root-MUSIC standard [48], nous développons à l'ordre 2, $\mathbf{a}(z_{k,T})$, $\mathbf{\Pi}_{1,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{2,T}$ autour des z, $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ comme

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(z_{k,T}) &= \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^{'}\delta\theta_{k,T} - i\mathbf{a}_k^{'}\delta r_{k,T} + \frac{1}{2}\mathbf{a}_k^{''}(\delta\theta_{k,T})^2 - i\mathbf{a}_k^{''}\delta\theta_{k,T}\delta r_{k,T} - \frac{1}{2}\mathbf{a}_k^{''}(\delta r_{k,T})^2 \\
&+ o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T}) \\
\mathbf{a}(z_{k,T}^{-1}) &= \mathbf{a}_k^{*} + \mathbf{a}_k^{'*}\delta\theta_{k,T} - i\mathbf{a}_k^{'*}\delta r_{k,T} + \frac{1}{2}\mathbf{a}_k^{''*}(\delta\theta_{k,T})^2 - i\mathbf{a}_k^{''*}\delta\theta_{k,T}\delta r_{k,T} - \frac{1}{2}\mathbf{a}_k^{''*}(\delta r_{k,T})^2 \\
&+ o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T}) \\
\mathbf{\Pi}_{1,T} &= \mathbf{\Pi}_1 + \delta\mathbf{\Pi}_{1,T} + \delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T} + o(\delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T}) \\
\mathbf{\Pi}_{2,T} &= \mathbf{\Pi}_2 + \delta\mathbf{\Pi}_{2,T} + \delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T} + o(\delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T}),
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{a}_k^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_k}{d\theta_k}$ et $\mathbf{a}_k^{''} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\mathbf{a}_k}{d\theta_k^2}$, où ici $(\delta\mathbf{\Pi}_{i,T})_{i=1,2}$ et $(\delta^2\mathbf{\Pi}_{i,T})_{i=1,2}$ dénotent le premier et le second terme du développement de $(\mathbf{\Pi}_{i,T})_{i=1,2}$ par rapport à $\delta\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$, avec $o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T})$ est un terme de troisième ordre en $(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T})$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(z_{k,T}) &= \mathbf{M}_k + \mathbf{M}_k^{'}\delta\theta_{k,T} - i\mathbf{M}_k^{'}\delta r_{k,T} + \frac{1}{2}\mathbf{M}_k^{''}(\delta\theta_{k,T})^2 - i\mathbf{M}_k^{''}\delta\theta_{k,T}\delta r_{k,T} \\
&- \frac{1}{2}\mathbf{M}_k^{''}(\delta r_{k,T})^2 + o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T})) \\
\mathbf{M}(z_{k,T}^{-1}) &= \mathbf{M}_k^{*} + \mathbf{M}_k^{'*}\delta\theta_{k,T} - i\mathbf{M}_k^{'*}\delta r_{k,T} + \frac{1}{2}\mathbf{M}_k^{''*}(\delta\theta_{k,T})^2 - i\mathbf{M}_k^{''*}\delta\theta_{k,T}\delta r_{k,T} \\
&- \frac{1}{2}\mathbf{M}_k^{''*}(\delta r_{k,T})^2 + o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T})).
\end{aligned}$$

En substituant ces développements d'ordre 2 de $\mathbf{\Pi}_{1,T}$, $\mathbf{\Pi}_{2,T}$, $\mathbf{M}(z_{k,T})$ et $\mathbf{M}(z_{k,T}^{-1})$ dans l'ex-

pression (4.7.60) de $g_{3,T}(z_{k,T})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k{}^*))\} + \{\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k) \\
&-\Re(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k{}^*))\} + 2\{\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k) - \Re(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k{}^*))\} \\
&+ 2\left(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^*))\right) + 2\Big(\{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) \\
&- \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}))\} + \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*})) \\
&+ \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^{'*}))\Big)(\delta\theta_{k,T} - i\delta r_{k,T}) \\
&+ 2\Big(\{\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{''}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*))\} + \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) \\
&- \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}))\Big)(-i\delta\theta_{k,T}\delta r_{k,T} + \frac{1}{4}(\delta\theta_{k,T})^2 - \frac{1}{4}(\delta r_{k,T})^2) \\
&+ o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T}),
\end{aligned} \tag{4.7.61}$$

en utilisant l'identité (4.7.58) et l'identité

$$\mathbf{a}_k^H\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{a}_k + \Re(\mathbf{a}_k^H\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{a}_k^* e^{-i\phi_k}) = 0,$$

obtenue à partir de l'identité $\tilde{\mathbf{a}}_k^H\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}$ (déduite à partir $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}$ et $\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}_k + \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\delta\tilde{\mathbf{a}}_{k,T} = \mathbf{0}$), les termes de premier ordre en $\delta\theta_{k,T}$ et $\delta r_{k,T}$ qui sont entre les accolades sont nuls. Cependant après simplification des calculs, l'équation (4.7.61) devient :

$$\begin{aligned}
g_{3,T}(z_{k,T}) &= \Big\{\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}))\Big)\left((\delta\theta_{k,T})^2 - (\delta r_{k,T})^2\right) \\
&+ 2\Big(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*})) \\
&+ \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^{'*}))\Big)\delta\theta_{k,T} \\
&+ 2\left(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k\delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k\delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^*)\right)\Big\} \\
&- 2i\Big\{\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k) + \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}\mathbf{M}_k) \\
&- \Re(\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^*) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}\mathbf{M}_k^*) \\
&+ \Big(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_1\mathbf{M}_k^{'}) - \Re(\mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_2^*\mathbf{M}_k^{'}\mathbf{\Pi}_2\mathbf{M}_k^{'*}))\Big)\delta\theta_{k,T}\Big\}\delta r_{k,T} \\
&+ o_2(\delta\theta_{k,T}, \delta r_{k,T}).
\end{aligned}$$

Puisque les différentes matrices $\mathbf{M}$ s'écrivent comme somme de matrices de rang 1 et que les matrices $\mathbf{\Pi}_1$, $\delta\mathbf{\Pi}_{1,T}$ et $\delta^2\mathbf{\Pi}_{1,T}$, [resp. $\mathbf{\Pi}_2$, $\delta\mathbf{\Pi}_{2,T}$ et $\delta^2\mathbf{\Pi}_{2,T}$] sont hermitiennes [resp. symétriques complexes] structurées, nous déduisons que les quatre premières lignes entre la première accolade sont réelles, bien que les trois dernières lignes entre la seconde accolade sont purement imaginaires. Puisque $z_{k,T}$ est une racine de $g_{3,T}(z_{k,T}) = 0$, et donc en prenant la partie imaginaire égale 0, on trouve l'équation (4.7.59). Et par conséquent, les trois algorithmes vérifient la même équation asymptotique (4.7.59), ceci implique que les distributions asymptotiques des estimées de DOA associées à ces algorithmes sont identiques. Nous choisissons l'algorithme 1 pour déterminer cette distribution asymptotique. Les estimées $\theta_{k,T}$ et $\phi_{k,T}$ sont

solutions de la minimisation globale :

$$(\theta_{k,T}, \phi_{k,T}) = \arg\min_{\theta,\phi} f_{1,T}(\theta, \phi),$$

avec $f_{1,T}(\theta, \phi) = \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta, \phi)\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \phi) = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}_{\theta,\phi})$ où $\mathbf{M}_{\theta,\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{a}}(\theta, \phi)\tilde{\mathbf{a}}(\theta, \phi)^H$. Puisque $(\theta_{k,T}, \phi_{k,T})$ satisfait :

$$\frac{\partial f_{1,T}(\theta, \phi)}{\partial \theta}_{|(\theta,\phi)=(\theta_{k,T},\phi_{k,T})=(\theta_k+\delta\theta_{k,T},\phi_k+\delta\phi_{k,T})} = 0$$

et

$$\frac{\partial f_{1,T}(\theta, \phi)}{\partial \phi}_{|(\theta,\phi)=(\theta_{k,T},\phi_{k,T})=(\theta_k+\delta\theta_{k,T},\phi_k+\delta\phi_{k,T})} = 0,$$

nous adoptons la même approche utilisée dans l'analyse asymptotique de l'algorithme 2, nous obtenons les équations suivantes à partir de développement à l'ordre 1 de $\frac{\partial f_{1,T}(\theta,\phi)}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial f_{1,T}(\theta,\phi)}{\partial\phi}$ autour de la vraie valeur (θ, ϕ)

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{M}''_{\theta,\theta})\delta\theta_{k,T} + \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{M}''_{\theta,\phi})\delta\phi_{k,T} + \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\theta}) &= 0 \\ \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{M}''_{\theta,\phi})\delta\theta_{k,T} + \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{M}''_{\phi,\phi})\delta\phi_{k,T} + \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\phi}) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{4.7.62}$$

avec $\mathbf{M}'_{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\mathbf{M}_{\theta,\phi}}{\partial\theta}$, $\mathbf{M}'_{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\mathbf{M}_{\theta,\phi}}{\partial\phi}$, $\mathbf{M}''_{\theta,\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\mathbf{M}_{\theta,\phi}}{\partial\theta^2}$, $\mathbf{M}''_{\theta,\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\mathbf{M}_{\theta,\phi}}{\partial\theta\partial\phi}$ et $\mathbf{M}''_{\phi,\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\mathbf{M}_{\theta,\phi}}{\partial\phi^2}$ associées à la source k. Nous notons que $\alpha^{(k)}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{M}''_{i,j}) = 2\Re(\tilde{\mathbf{a}}^H_{i,k}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{a}}_{j,k})$, $i, j = \theta, \phi$, (4.7.62) peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(k)}_{\theta,\theta} & \alpha^{(k)}_{\theta,\phi} \\ \alpha^{(k)}_{\theta,\phi} & \alpha^{(k)}_{\phi,\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta_{k,T} \\ \delta\phi_{k,T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\theta}) \\ \mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\phi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}) \\ o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}) \end{pmatrix}.$$

A partir de cette équation, et après un calcul algébrique simple, nous déduisons l'équation suivante qui relie les deux erreurs d'estimation $\delta\theta_{k,T}$ et $\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$

$$\delta\theta_{k,T} = \frac{-1}{\alpha^{(k)}_{\theta,\theta}\alpha^{(k)}_{\phi,\phi} - (\alpha^{(k)}_{\theta,\phi})^2}\left(\alpha^{(k)}_{\phi,\phi}\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\theta}) - \alpha^{(k)}_{\theta,\phi}\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_{\phi})\right) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}),$$

où $\mathrm{Tr}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\mathbf{M}'_i) = (\tilde{\mathbf{a}}^T_{i,k} \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_k + \tilde{\mathbf{a}}^T_k \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_{i,k})\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$, $i = \theta, \phi$. Par conséquent, la matrice Jacobienne $\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}_1}_{\boldsymbol{\theta}}$ de l'application qui relie $\boldsymbol{\theta}_T$ à $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ est donnée par $\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}_1}_{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^T_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^T_K \end{pmatrix}$ avec

$$\mathbf{d}^T_k = \frac{-1}{\alpha^{(k)}_{\theta,\theta}\alpha^{(k)}_{\phi,\phi} - (\alpha^{(k)}_{\theta,\phi})^2}\left(\alpha^{(k)}_{\phi,\phi}(\tilde{\mathbf{a}}^T_{\theta,k} \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_k + \tilde{\mathbf{a}}^T_k \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_{\theta,k}) - \alpha^{(k)}_{\theta,\phi}(\tilde{\mathbf{a}}^T_{\phi,k} \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_k + \tilde{\mathbf{a}}^T_k \otimes \tilde{\mathbf{a}}^H_{\phi,k})\right),$$

telle que

$$\delta\boldsymbol{\theta}_T \stackrel{\text{def}}{=} (\delta\theta_{k,T}, \ldots, \delta\theta_{K,T})^T = \mathbf{D}^{\mathrm{Alg}_1}_{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}).$$

Puisque la distribution de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ est asymptotiquement gaussienne de première matrice de covariance $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$, en vertu le théorème 4.2 la distribution de $\boldsymbol{\theta}_T$ est aussi asymptotiquement gaussienne de matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}^{\mathrm{Alg}_1}_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}(\mathbf{D}^{\mathrm{Alg}_1}_{\boldsymbol{\theta}})^H$. En utilisant l'expression (4.6.38) de $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$, les expressions (4.6.41) et (4.6.42) de $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}$ sont déduites simplement après un calcul algébrique simple en utilisant $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ et $\tilde{\mathbf{a}}^H\mathbf{J}\mathbf{\Pi}^*_{\tilde{y}} = \mathbf{0}^T$ et les propriétés du produit de Kronecker.

Annexe 5 : Preuve du Résultat 4.12

Considérons deux sources non corrélées de même puissance ($\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$) et de phases de non circularité ϕ_1 et ϕ_2. Nous avons d'après (4.5.7) et (4.5.8) :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H = \sigma^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^H \end{pmatrix},$$

avec $\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^* e^{-i\phi_k} \end{pmatrix}$. Les deux valeurs propres non nulles de la matrice hermitienne $\tilde{\mathbf{S}}$ de rang 2, sont donc données par les racines du polynôme du second ordre suivant :

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}(\tilde{\mathbf{S}})\lambda + \det\left(\sigma^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

Ces deux valeurs sont données par :

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tilde{\mathbf{S}}) \left[1 + (-1)^k \left(1 - \frac{\det\left(\sigma^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}\right)}{\left[\mathrm{Tr}(\tilde{\mathbf{S}})/2\right]^2} \right)^{1/2} \right] \quad k = 1, 2, \qquad (4.7.63)$$

où les termes suivants sont calculés facilement $\mathrm{Tr}(\tilde{\mathbf{S}}) = 4\sigma^2 M$ et $\det\left(\sigma^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 & \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{pmatrix}\right) = 4\sigma^4(M^2 - \cos(\psi_d)\mathrm{SI}^2)$ avec $\psi_d \stackrel{\text{def}}{=} (M-1)\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta\phi}{2}$ et $\mathrm{SI} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(M\frac{\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}$. En remplaçant ces termes dans (4.7.63) et après quelques manipulations algébriques simples, nous trouvons l'équation (4.6.44).

Annexe 6 : Preuve du Résultat 4.13

Dans le cas d'une source complexe non circulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} &= 2\|\mathbf{a}_1\|^2\sigma_{x_1}^2 \left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\right)\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\right)^H \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \sigma_n^2\tilde{\mathbf{S}}^{\#}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{S}}^{\#} = \frac{1}{2\|\mathbf{a}_1\|^2}\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{2\|\mathbf{a}_1\|^2}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_1^4}\right)\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\right)\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\right)^H. \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans (4.6.42)], on obtient (4.6.45).

Annexe 7 : Preuve du Résultat 4.14

En vertu de la preuve du résultat 4.5 où ici $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ est remplacée par $\mathbf{\Pi}_{1,T}$, l'équation (4.6.46) est prouvée. Dans le cas d'une seule source, nous avons $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H = \lambda_1\mathbf{W}_1\mathbf{W}_1^H + \lambda_2\mathbf{W}_2\mathbf{W}_2^H$ où $\lambda_1 = \sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2(1+\rho_1)$, $\lambda_2 = \sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2(1-\rho_1)$, $\mathbf{W}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1^* e^{-i\phi_1} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{W}_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{2}\|\mathbf{a}_1\|}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ -\mathbf{a}_1^* e^{-i\phi_1}\end{pmatrix}$. Et donc l'expression de $\mathbf{U}_1$ est déduite à partir de $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix}\mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2\\ \mathbf{U}_2^* & \mathbf{U}_1^*\end{pmatrix} = \sigma_n^2\tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \sigma_n^4(\tilde{\mathbf{S}}^{\#})^2$ avec

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^4(1-\rho_1^2)}\left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2}\frac{1+\rho_1^2}{1-\rho_1^2}\right).$$

En substituant cette expression dans (4.6.46), nous trouvons (4.6.46).

Annexe 8 : Preuve du Résultat 4.15

Les DOA estimées $\theta_{k,T}$ sont solutions de :

$$\frac{\partial g_{5,T}(\theta)}{\partial\theta}_{|\theta=\theta_{k,T}=\theta_k+\delta\theta_{k,T}} = 0 = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{A}}_{k,T}^{'H}\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}_{k,T})\right) + \left(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{A}}_{k,T}^{H}\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}_{k,T}^{'})\right). \quad (4.7.64)$$

Grâce au développement limité à l'ordre 1 de $\bar{\mathbf{A}}_{k,T}$ au voisinage de θ_k, on obtient

$$\bar{\mathbf{A}}_{k,T} = \bar{\mathbf{A}}_k + \bar{\mathbf{A}}_k^{'}\theta_{k,T} + o(\delta\theta_{k,T}). \quad (4.7.65)$$

En substituant (4.7.65) et $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T} = \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} + \delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ dans (4.7.64), et en ne gardant que les termes du premier ordre en $\delta\theta_{k,T}$ et $\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$, on obtient :

$$2\mathrm{Tr}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}'^H_k\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}_k^{'})\delta\theta_{k,T} + \mathrm{Tr}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}'^H_k\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}_k) + \mathrm{Tr}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}_k^H\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}}_k^{'}) + o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}) = 0.$$

En utilisant l'égalité (1.1.6), on obtient :

$$\delta\theta_{k,T} = \frac{\mathrm{vec}^H(\mathbf{W})(\bar{\mathbf{A}}_k^T\otimes\bar{\mathbf{A}}'^H_k + \bar{\mathbf{A}}'^T_k\otimes\bar{\mathbf{A}}_k^H)\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})}{2\mathrm{Tr}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}'^H_k\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}_k^{'})} + o(\delta\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}). \quad (4.7.66)$$

Et puisque $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ est asymptotiquement gaussienne de matrice de covariance suivante donnée par le résultat 4.6 telle que

$$\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = \frac{1}{2}\mathbf{L}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^*\otimes\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{U}}^*\otimes\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\mathbf{L},$$

où $\mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J}\otimes\mathbf{J})$. Nous avons en vertu du théorème de continuité, $\boldsymbol{\theta}_T$ est aussi asymptotiquement gaussienne de matrice de covariance :

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,l} = \frac{1}{\beta_k\beta_l}\mathrm{vec}^H(\mathbf{W})\mathbf{M}_k\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}\mathbf{M}_l^H\mathrm{vec}(\mathbf{W}),$$

avec $\beta_k \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathrm{Tr}(\mathbf{W}\bar{\mathbf{A}}'^H_k\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}_k^{'})$ et $\mathbf{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{A}}_k^T\otimes\bar{\mathbf{A}}'^H_k + \bar{\mathbf{A}}'^T_k\otimes\bar{\mathbf{A}}_k^H$. Nous obtenons après un calcul algébrique simple en tenant compte de l'identité $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}_l = \mathbf{O}$ que :

$$\mathbf{M}_k\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}\mathbf{M}_l^H = \frac{1}{2}\mathbf{L}\left((\bar{\mathbf{A}}_k^T\tilde{\mathbf{U}}^*\bar{\mathbf{A}}_l^*)\otimes(\bar{\mathbf{A}}'^H_k\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\bar{\mathbf{A}}_l^{'}) + (\bar{\mathbf{A}}'^T_k\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^*\bar{\mathbf{A}}^{*'}_l)\otimes(\bar{\mathbf{A}}_k^H\tilde{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{A}}_l)\right)\mathbf{L},$$

et puisque $\mathbf{L}\text{vec}(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_{1,1}+w_{2,2} \\ 2w_{1,2}^* \\ 2w_{1,2} \\ w_{1,1}+w_{2,2} \end{pmatrix}$ et $\beta = 2(w_{1,1}+w_{2,2})\mathbf{a}'^H_k \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'_k$, l'expression (4.6.47) est prouvée.

Après quelques manipulations algébriques simples, en exploitant la structure de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ et en utilisant la définition du produit Kronecker, la matrice $\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\mathbf{A}}_k^T \tilde{\mathbf{U}}^* \bar{\mathbf{A}}_l^*) \otimes (\bar{\mathbf{A}}'^H_k \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} \bar{\mathbf{A}}'_l) + (\bar{\mathbf{A}}'^T_k \mathbf{\Pi}^*_{\tilde{y}} \bar{\mathbf{A}}'^*_l) \otimes (\bar{\mathbf{A}}_k^H \tilde{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{A}}_l)$ de l'égalité (4.6.47) peut s'écrire en fonction de $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{\Pi}_1$ et $\mathbf{\Pi}_2$ comme :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & \beta^* & 0 \\ \beta^* & 2\alpha & 0 & \beta^* \\ \beta & 0 & 2\alpha & \beta \\ 0 & \beta & \beta^* & 2\alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_k)(\mathbf{a}'^H_k \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'_k)$ et $\beta \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_2 \mathbf{a}_k^*)(\mathbf{a}'^H_k \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'_k)$. Par conséquent (4.6.47) devient :

$$(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,k} = \frac{1}{2\alpha_k^2}\, 4[\alpha(1+|z|^2) + 2\Re(\beta z)],$$

qui est minimale pour $z_{opt} = -\frac{\beta^*}{\alpha} = -\frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{U}_2^* \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_k}$, et la valeur minimale associée est donnée par :

$$\min_z (\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}})_{k,k} = \frac{1}{2\alpha_k^2}\frac{4}{\alpha}(\alpha^2 - |\beta|^2) = \frac{(\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_k)^2 - |\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_2 \mathbf{a}_k^*|^2}{2(\mathbf{a}'^H_k \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}'_k)(\mathbf{a}_k^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_k)} \tag{4.7.67}$$

et la preuve du résultat est achevée.

Nous notons qu'à partir de l'égalité (4.7.66), une estimée consistant quelconque $\mathbf{W}_T = \mathbf{W} + O(\mathbf{R}_{\tilde{y}} - \mathbf{R}_{\tilde{y},T})$ de $\mathbf{W}$ n'a aucun effet sur la variance asymptotique des estimées de DOA fournies par l'algorithme MUSIC pondéré.

Annexe 9 : Preuve du Résultat 4.16

Dans le cas d'une seule source de non circularité quelconque, nous obtenons à partir de l'expression de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ donnée dans l'annexe 7, les expressions suivantes de $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2 \|\mathbf{a}_1\|^4 (1-\rho_1^2)} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2 \|\mathbf{a}_1\|^2} \frac{1+\rho_1^2}{1-\rho_1^2}\right) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H, \\ \mathbf{U}_2 &= -\frac{\rho_1 \sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2 \|\mathbf{a}_1\|^4 (1-\rho_1^2)} \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2 \|\mathbf{a}_1\|^2} \frac{2}{1-\rho_1^2}\right) e^{i\phi_1} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans (4.7.67) et après quelques manipulations algébriques, nous obtenons :

$$\min_z C_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{(\mathbf{a}_1^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_1)^2 - |\mathbf{a}_1^H \mathbf{U}_2 \mathbf{a}_1^*|^2}{(\mathbf{a}_1^H \mathbf{U}_1 \mathbf{a}_1)} = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{2r_1^{-1} + \|\mathbf{a}_1\|^{-2} r_1^{-2} + \|\mathbf{a}_1\|^2 - \|\mathbf{a}_1\|^2 \rho_1^2}{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 + 1 + (1 - \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1)\rho_1^2}\right],$$

où $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_n^2}$, qui est l'expression de la CRB gaussienne non circulaire (cf. chapitre 5).

Chapitre 5

Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux gaussiens non circulaires

5.1 Introduction

La borne de Cramer Rao (CRB) joue un rôle important dans l'évaluation des performances asymptotiques des estimateurs paramétriques du second ordre. Cette borne fournit une variance minimale sur tout estimateur du second ordre sans biais sous le modèle déterministe ou sous le modèle stochastique. Dans notre modèle de DOA bande étroite, le modèle déterministe considère que les signaux sources sont fixés a priori et identiques pour chaque réalisation et que le bruit est un processus aléatoire gaussien circulaire centré à échantillons indépendants. Le modèle stochastique, quand à lui suppose en général que les signaux sources et le bruit sont des processus aléatoires gaussiens centrés temporellement non corrélés et indépendants entre eux. De plus, cette borne peut être utilisée à définir un seuil statistique absolu de résolution [99] sur tout estimateur du second ordre sans biais.

La CRB stochastique est atteinte asymptotiquement (pour un nombre d'observations très grandes) par l'estimateur du maximum de (MV) sous certaines conditions de régularité, bien que la CRB déterministe reste en général non atteignable (car le nombre de paramètres inconnus croit linéairement en fonction du nombre d'observations). Une expression conventionnelle de la CRB désignée par la formule de Slepian-Bangs a été obtenue avec des distributions gaussiennes réelles dans [97, 5], ensuite cette expression a été étendue à des observations gaussiennes complexes circulaires (cf. par exemple [103, rel. (B.3.25)]). Bien que permettant de calculer la CRB sur tout paramètre en particulier sur le paramètre de DOA seul, ces expressions sont données sous une forme non matricielle et non interprétable.

Dans le cas de signaux sources gaussiens complexes circulaires affectés par un modèle de bruit additif blanc uniforme, les CRB stochastiques et déterministes du paramètre de DOA seul ont été dérivées dans (cf. par exemple, [107, 106, 120, 69]) et dans [102] respectivement d'une manière directe à partir de la formule de Slepian-Bangs ou indirecte par l'analyse

asymptotique de l'estimateur du MV après concentration de la fonction de log-vraisemblance autour du paramètre de DOA seul [42, 69].

Mais ce modèle de bruit semble irréaliste quand il est d'origine externe, ce qui est le cas en particulier dans les systèmes de communications mobiles pour lequel le bruit est en général spatialement coloré. Cependant, dans le cas particulier de réseaux lacunaires, ce modèle général de bruit spatialement corrélé peut être simplifié [61, 72] en supposant qu'il est simplement blanc non uniforme. Dans ce cas général de bruit arbitraire inconnu de matrice de covariance quelconque ou diagonale arbitraire, les paramètres de DOA et les paramètres de bruit sont non découplés dans la matrice d'information de Fisher (FIM). Cependant, des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul ont été dérivés d'une manière directe à partir de la formule de Slepian-Bangs gaussienne complexe circulaire sous le modèle de bruit blanc non uniforme et arbitraire inconnue (dont la matrice de covariance spatiale est paramétrée de façon identifiable) dans [72] et [32].

Parmi les raisons pour lesquelles nous calculons des expressions de la CRB du paramètre de DOA seul de signaux sources gaussiens complexes non circulaires affectés par un bruit blanc uniforme ou arbitraire inconnu, est que sous certaines conditions de régularités, la CRB stochastique du paramètre de DOA seul sous la distribution gaussienne réelle [resp. complexe circulaire] est un majorant de la CRB stochastique associée à des distributions arbitraires de même matrices de covariance (cf. par exemple [103, p. 293]). De plus, il n'existe pas des expressions analytiques explicites de ces bornes gaussiennes non circulaires sous différents modèles de bruits. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'utilisation de la seconde matrice de covariance améliore les performances asymptotiques d'algorithmes de recherche monodimensionnelle complexes non circulaires comparés aux algorithmes standards, pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de séparation de phase de non circularité, dont les performances asymptotiques sont évaluées en confrontant leurs variances asymptotiques à l'expression non explicite de la borne AMV, dont l'avantage est qu'il reste valable quelle que soit la connaissance a priori sur les signaux sources.

Dans ce chapitre, nous étendons la formule de Slepian-Bangs au cas général de distributions gaussiennes complexes non circulaires qui reste valable quel que soit le modèle de bruit. Des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul sont obtenues d'une manière directe ou indirecte sans aucune connaissance a priori sur les signaux sources affectés par différents modèles de bruit. Dans le cas particulier d'une seule source complexe non circulaire, des expressions explicites de la CRB stochastique de la DOA sont obtenues sous le modèle de bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme, nous montrons de plus que chacune de ces CRB décroît quand le taux de non circularité augmente. Dans le cas de plusieurs sources, nous montrons que la CRB complexe non circulaire est bornée supérieurement par la CRB gaussienne complexe circulaire et inférieurement par la CRB déterministe à première matrice de covariance fixée et à matrice de covariance spatiale de bruit fixé arbitraire. Pour des sources indépendantes affectées par un bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme,

nous montrons que les trois CRB gaussienne complexe circulaire, gaussienne complexe non circulaire et la CRB déterministe sont équivalentes quand les SNR tendent vers l'infini. Enfin, diverses illustrations numériques sont présentées pour illustrer l'évolution de cette CRB en fonction de la séparation angulaire, de la séparation de phase de non circularité, du SNR et du taux de non circularité, et des comparisons sont effectues avec la CRB complexe circulaire et la CRB déterministe.

5.2 Borne de Cramer Rao stochastique gaussienne non circulaire

Dans cette section, nous étendons la formule complexe circulaire de Slepian-Bangs (cf. par exemple [103, rel. (B.3.25)]) au cas d'observations gaussiennes non circulaires. Dans la suite, nous utiliserons cette formule pour déterminer la CRB du paramètre de DOA seul.

Considérons un vecteur aléatoire $\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_r + i\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^M$ gaussien complexe non circulaire dont le vecteur espérance mathématique et les matrices de covariances sont définies par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_y &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_r + i\mathbf{m}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\mathbf{y}_r) + i\mathrm{E}(\mathbf{y}_i) \\
\mathbf{R}_y &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^H] \\
\mathbf{R}'_y &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^T].
\end{aligned}$$

Par construction, $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ sont respectivement hermitienne et symétrique complexe. $\mathbf{m}_y$, $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ sont paramétrées par des paramètres réels formant le vecteur $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^L$.

Pour exploiter au mieux l'information contenue dans la seconde matrice de covariance $\mathbf{R}'_y$, nous considérons le vecteur aléatoire étendu $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{2M}$ construit à partir de $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ et son conjugué :

$$\tilde{\mathbf{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^* \end{pmatrix},$$

dont l'espérance mathématique et la matrice de covariance sont structurées comme :

$$\mathbf{m}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_y \\ \mathbf{m}_y^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{R}'_y \\ \mathbf{R}'^*_y & \mathbf{R}^*_y \end{bmatrix}.$$

Avec ces notations, nous énoncerons le théorème suivant qui caractérise la fonction de densité de probabilité (PDF) d'un vecteur aléatoire gaussien complexe non circulaire.

Théorème 5.1 *La PDF de* $\mathbf{y}$ *est donnée par :*

$$f(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha}) = (\pi)^{-M}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})]^{-1/2}\exp[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{y}}})^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{y}}})]. \tag{5.2.1}$$

Preuve : On définit un nouveau vecteur aléatoire $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{2M}$ formé par les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{y}$ tel que

$$\bar{\mathbf{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur et le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}$ sont reliés à l'aide d'une matrice de passage non singulière $\mathbf{M}$:

$$\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}} = \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\tilde{y}}), \tag{5.2.2}$$

avec $\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -i\mathbf{I} & i\mathbf{I} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{M}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & i\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -i\mathbf{I} \end{bmatrix}$. Puisque $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{2M}$ est un vecteur aléatoire réel gaussien, sa densité de probabilité s'exprime comme :

$$f(\bar{\mathbf{y}}; \boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-M}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\bar{y}})]^{-1/2}\exp[-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}})^H \mathbf{R}_{\bar{z}}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}})], \tag{5.2.3}$$

avec

$$\mathbf{R}_{\bar{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_r} & \mathbf{R}_{y_r,y_i} \\ \mathbf{R}_{y_i,y_r} & \mathbf{R}_{y_i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_{\bar{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_r \\ \mathbf{m}_i \end{pmatrix},$$

où

$$\mathbf{R}_{y_r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Re(\mathbf{R}_y + \mathbf{R}'_y) \quad , \quad \mathbf{R}_{y_r,y_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Im(-\mathbf{R}_y + \mathbf{R}'_y)$$
$$\mathbf{R}_{y_i,y_r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Im(\mathbf{R}_y + \mathbf{R}'_y) \quad , \quad \mathbf{R}_{y_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Re(\mathbf{R}_y - \mathbf{R}'_y).$$

Grâce à l'égalité (5.2.2), la PDF de $\mathbf{y}$ peut être déduite de (5.2.3). En effet, le terme exponentiel de (5.2.3) devient :

$$\begin{aligned}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}})^H \mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}}) &= (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}})^H (\mathbf{M}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{M}^H)^{-1}(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\bar{y}}) \\ &= (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\tilde{y}})^H \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{m}_{\tilde{y}}).\end{aligned}$$

En calculant le déterminant, on obtient :

$$\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\bar{y}}) = \mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})(\mathrm{Det}(\mathbf{M}))^2 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Det}(\mathbf{M}) = i^M 2^{-M},$$

et donc

$$(\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\bar{y}}))^{-\frac{1}{2}} = 2^M(\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}))^{-\frac{1}{2}}.$$

En remplaçant tous ces résultats dans (5.2.3), on trouve la PDF de $\mathbf{y}$ donnée par (5.2.1).

Remarque 5.1

1. Nous remarquons que l'expression (5.2.1) a été démontrée également dans [116] sans utilisation explicite des deux matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$, contrairement à la démonstration présentée dans [73].
2. Nous notons que pour des vecteurs aléatoires gaussiens complexes circulaires au second ordre, i.e., $\mathbf{R}'_y = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_y^* \end{bmatrix}$. En substituant cette expression dans (5.2.1) et après simplification on trouve l'expression classique de PDF des vecteurs aléatoires gaussiens complexes circulaires (cf. par exemple, [103, rel. B.3.25]) :

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}) = (\pi)^{-M}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_y)]^{-1}\exp[(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^H \mathbf{R}_y^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)]. \tag{5.2.4}$$

Enfin, la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire gaussien complexe non circulaire est caractérisée par l'expression (5.2.1), dont le terme exponentiel contenant les deux matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ formant la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ résume complètement l'information apportée par les deux matrices de covariance $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$. Notons que pour évaluer les performances asymptotiques des estimées, nous avons besoin d'une borne inférieure sur toutes les matrices de covariance des estimateurs sans biais. Dans ce sens, le résultat 5.1 donne l'expression de la FIM dont l'inverse est la borne de Cramer Rao.

Résultat 5.1 *La FIM normalisée associée à des distributions gaussiennes complexes non circulaires est donnée par :*

$$(\mathbf{I}_F)_{k,l} = \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k}\right)^H \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{m}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_l} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_l}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\right]. \tag{5.2.5}$$

Preuve : Grâce à l'identité (5.2.3), la PDF de $\mathbf{y}$ est déduite de la PDF de $\bar{\mathbf{y}}$ gaussienne réelle d'espérance mathématique $\mathbf{m}_{\bar{y}}$ et de matrice de covariance $\mathbf{R}_{\bar{y}}$. Donc la formule réelle de Slepian-Bangs [103, rel. B.3.3], peut être appliquée et on obtient :

$$(\mathbf{I}'_F)_{k,l} = \frac{\partial \mathbf{m}_{\bar{y}}^T}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{m}_{\bar{y}}}{\partial \theta_l} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\bar{y}}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\bar{y}}}{\partial \theta_l}\mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1}\right], \tag{5.2.6}$$

puis, en vertu des relations (5.2.2) et $\mathbf{R}_{\bar{y}} = \mathbf{M}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{M}^H$, en utilisant

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_r \\ \mathbf{m}_i \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} \mathbf{m}_y \\ \mathbf{m}_y^* \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{R}_{\bar{y}}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{y}}}}{\partial \theta_l}\mathbf{R}_{\bar{y}}^{-1} = \mathbf{M}\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_l}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{M}^{-1},$$

dans (5.2.6), on obtient (5.2.5).

Remarque 5.2
Pour des vecteurs aléatoires gaussiens complexes circulaires au second ordre, $\mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_y^* \end{bmatrix}$ et par conséquent, à partir de la formule (5.2.5) on obtient la formule standard normalisée gaussienne complexe circulaire de Slepian-Bangs [103, rel. B.3.25] :

$$(\mathbf{I}_F)_{k,l} = \left(\frac{\partial \mathbf{m}_y}{\partial \theta_k}\right)^H \mathbf{R}_y^{-1}\frac{\partial \mathbf{m}_y}{\partial \theta_l} + \mathrm{Tr}\left[\frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_y^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \theta_l}\mathbf{R}_y^{-1}\right].$$

5.3 Application à l'estimation de DOA

Nous adoptons les mêmes notations utilisées dans le chapitre 4 (cf. section 4.2). Dans la section 5.7 de ce chapitre, nous considérons le modèle de bruit $\mathbf{n}_t$ gaussien complexe circulaire spatialement corrélé ou non, introduit dans [122] et utilisé dans [32] de matrice de covariance arbitraire inconnue

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}),$$

où $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1 \ldots, \sigma_N)^T$ est un vecteur de coefficients réels inconnus utilisé pour paramétrer la matrice de covariance de bruit[1].

La PDF d'une observation $\mathbf{y}_t$, est donnée dans la section précédente et s'exprime en fonction de $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t^* \end{pmatrix}$ comme :

$$f(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = (\pi)^{-M}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha}))]^{-1/2}\exp[-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{y}}_t^H \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\mathbf{y}}_t]$$

où

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^H) = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Q}_{\tilde{n}},$$

avec

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}'_x \\ \mathbf{R}'^*_x & \mathbf{R}^*_x \end{bmatrix}, \tag{5.3.7}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{Q}_{\tilde{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_n^* \end{bmatrix}.$$

Notons que cette expression reste valable quelle que soit le modèle de bruit. De plus, elle est semblable à celle donnée dans [103, rel. B.3.25] pour des signaux sources complexes gaussiennes circulaires.

En absence de connaissances a priori sur les signaux sources, la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha})$ est paramétrée par $L = K + K^2 + K(K+1) + N$ paramètres réels sous la contrainte $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ structurée (5.3.7). Ces paramètres forment le vecteur $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ avec $\boldsymbol{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} ((\Re([\mathbf{R}_x]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}_x]_{i,j}), \Re([\mathbf{R}'_x]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}'_x]_{i,j}))_{1\leq j<i\leq K}, ([\mathbf{R}_x]_{i,i}, \Re([\mathbf{R}'_x]_{i,i}), \Im([\mathbf{R}'_x]_{i,i}))_{i=1,\ldots,K})^T$.

Nous supposons que le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ est strictement identifiable à partir de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha})$ dans le sens suivant :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha}') \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'. \tag{5.3.8}$$

5.4 Identifiabilité des paramètres

En statistique paramétrique, un problème de grande importance s'impose, c'est l'unicité des paramètres à partir de la distribution des observations. Dans cette section, nous rappelons quelques définitions [63] qui caractérisant l'identifiabilité d'un modèle paramétrique. Nous donnons une condition nécessaire qui assure l'identifiabilité des paramètres dans le cas de bruit gaussien circulaire de matrice de covariance arbitraire paramétrée par des paramètres réels inconnus. Nous présentons le problème d'identifiabilité globale des paramètres de DOA de signaux sources non circulaires qui fait partie des perspectives de cette thèse en s'inspirant des résultats publiés dans le cas d'observations complexes circulaires [119, 118, 8, 43].

[1] Notons que dans le cas de bruit blanc uniforme, le vecteur $\boldsymbol{\sigma}$ est remplacé par σ_n^2.

5.4.1 Diverses définitions de l'identifiabilité

Pour un modèle paramétrique $(P_{\boldsymbol{\theta}})_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}$ où $\boldsymbol{\Theta}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on distingue trois principales définitions de l'identifiabilité :

Identifiabilité globale
Le paramètre $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ est identifiable si l'application $\boldsymbol{\theta} \longrightarrow P_{\boldsymbol{\theta}}$ est injective. C'est à dire :

$$P_{\boldsymbol{\theta}} = P_{\boldsymbol{\theta}'} \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}'.$$

Comme cette définition n'est pas toujours satisfaite en pratique en imagerie d'antenne, on lui préfère :

Identifiabilité ponctuelle en $\boldsymbol{\theta}_*$
La valeur particulier $\boldsymbol{\theta}_* \in \boldsymbol{\Theta}$ est identifiable si $\forall\ \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_* \Rightarrow P_{\boldsymbol{\theta}} \neq P_{\boldsymbol{\theta}_*}$. L'identifiabilté globale est satisfaite si l'identifiabilité ponctuelle est acquise $\forall\ \boldsymbol{\theta}_*$. Comme cette définition est quelque fois difficile à satisfaire, on a souvent recours à :

Identifiabilité locale en $\boldsymbol{\theta}_*$
La valeur particulier $\boldsymbol{\theta}_* \in \boldsymbol{\Theta}$ est dite localement identifiable, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\boldsymbol{\theta}_*$ tel que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in\mathcal{V}$:

$$\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_* \quad \Rightarrow P_{\boldsymbol{\theta}} \neq P_{\boldsymbol{\theta}_*}.$$

Nous avons la propriété suivante [63] :

Théorème 5.2 *Si la FIM calculée en $\boldsymbol{\theta}_*$ est régulière, alors $\boldsymbol{\theta}_*$ est localement identifiable.*

Remarque 5.3
Dans le cas d'observations gaussiennes circulaires ou non circulaires indépendantes $(\mathbf{y}_t)_{t=1,\ldots,T}$. $P_{\boldsymbol{\theta}}$ est caractérisé seulement par la matrice de covariance $\mathbf{R}_y$ ou respectivement par les deux matrices de covariance $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ et l'identifiabilité globale revient à l'implication (5.3.8).

5.4.2 Identifiabilité locale

En utilisant l'interprétation géométrique de la FIM [32] dans le cas gaussien circulaire sans connaissance a priori sur les signaux sources. Une condition nécessaire pour que la FIM soit régulière coïncide avec la condition que le nombre d'équations indépendantes fourni par la matrice de covariance de $\mathbf{y}_t$ est supérieur au égal au nombre de paramètres réels de notre modèle. Soit dans le cas circulaire :

$$\underbrace{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{K^2}_{\mathbf{R}_x} + \underbrace{N}_{\boldsymbol{\sigma}} \leq \underbrace{M^2}_{\mathbf{R}_y}.$$

Cette approche s'étend au cas non circulaire et une condition nécessaire pour que la FIM soit régulière est :

$$\underbrace{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{(2K)^2}_{\mathbf{R}_{\tilde{x}}} + \underbrace{N}_{\boldsymbol{\sigma}} \leq \underbrace{(2M)^2}_{\mathbf{R}_{\tilde{y}}}.$$

Notons que cette condition n'est plus équivalente à ce que le nombre d'équations indépendantes fourni par les deux matrices de covariance de $\mathbf{y}_t$ soit supérieur ou égal au nombre de paramètres du modèle qui est ici :

$$\underbrace{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{K^2}_{\mathbf{R}_x} + \underbrace{K(K+1)}_{\mathbf{R}'_x} + \underbrace{N}_{\boldsymbol{\sigma}} \leq \underbrace{M^2}_{\mathbf{R}_y} + \underbrace{M(M+1)}_{\mathbf{R}'_y}.$$

Nous remarquons que cette condition est nécessaire mais n'est pas suffisante pour assurer l'identifiabilité globales des paramètres.

5.4.3 Présentation du problème d'identifiabilité non circulaire

En traitement d'antenne, ce problème d'identifiabilité dépend de la géométrie de l'antenne et de la connaissance a priori que l'on dispose sur les signaux sources ou sur le modèle de bruit. Dans le cas de signaux sources gaussiennes complexes circulaires, des conditions nécessaires et suffisantes d'identifiabilité des paramètres de DOA sont dérivées dans [119, 118] avec un réseau arbitraire et dans [8] avec un réseau linéaire uniforme. Dans le cas des paramètres multiples par source, des conditions nécessaires et suffisantes sont données dans [43] avec un réseau arbitraire.

Dans ce paragraphe, nous présentons le problème d'identifiabilité globale des paramètres de DOA de signaux sources non circulaires qui pourrait être l'objet d'un prolongement de cette thèse. Notons que sous l'hypothèse de signaux sources complexes circulaires, le problème d'identifiabilité des paramètres de DOA présenté et étudié dans [119, 118] néglige le terme du bruit où des conditions nécessaires et suffisantes sont dérivées de telle sorte que l'équation $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ où $\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_T)$ et $\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_T)$ admet une solution unique.
Contrairement à ce problème d'identifiabilité étudié dans [119, 118] basé sur des matrices formées par des vecteurs d'observations, nous considérons le problème d'identifiabilité globale des paramètres de signaux sources non circulaires basé sur les deux matrices de covariance $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$, qui consiste à spécifier des hypothèses sur le réseau de capteurs, les signaux sources et sur le modèle de bruit qui assurent l'implication suivante :

$$\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}_y(\boldsymbol{\alpha}') \;\text{ et }\; \mathbf{R}'_y(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}'_y(\boldsymbol{\alpha}') \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'. \tag{5.4.9}$$

Dans le cas particulier de signaux sources non corrélés de non circularité maximale, en posant $\boldsymbol{\Delta}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_x = \text{Diag}\left(\sigma^2_{x_1}, \ldots, \sigma^2_{x_K}\right)$, $\boldsymbol{\Delta}_\phi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}\left(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_K}\right)$, $\boldsymbol{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_1, \ldots, \phi_K)$ et $\boldsymbol{\theta}_\phi \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\phi}^T)^T$, la matrice de covariance spatiale étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ peut s'écrire sous la forme suivante (cf. chapitre 4) :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_\phi)\boldsymbol{\Delta}_\sigma\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta}_\phi) + \sigma_n^2\mathbf{I},$$

où

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Delta}^*_\phi \end{pmatrix} = \left(\tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_1, \phi_1), \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_K(\theta_K, \phi_K)\right).$$

avec $\tilde{\mathbf{a}}_k(\theta_k, \phi_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_k(\theta_k) \\ \mathbf{a}_k^*(\theta_k)e^{-i\phi_k} \end{pmatrix}$.
Par conséquent, le problème d'identifiabilité défini par l'égalité (5.4.9) est équivalent au problème suivant :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_\phi)\boldsymbol{\Delta}_\sigma\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta}_\phi) + \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}'_\phi)\boldsymbol{\Delta}'_\sigma\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta}'_\phi) + \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}') \Rightarrow \boldsymbol{\theta}_\phi = \boldsymbol{\theta}'_\phi,\ \boldsymbol{\Delta}_\sigma = \boldsymbol{\Delta}'_\sigma \text{ et } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'.$$

Remarque 5.4

1. Par simulation, nous avons montré dans le chapitre 4 que pour des signaux complexes non circulaires, rayonnant sur un réseau linéaire uniforme ou circulaire uniforme (avec $d = \lambda_0/2$) [aussi montré dans [15, 31, 36]], $(2M-2)$ signaux sources peuvent être identifiés. Alors que, dans le cas de sources complexes circulaires, le nombre des sources identifiable est $(M-1)$ dans cette situation.

2. Dans le cas de signaux sources non corrélés complexes non circulaires de non circularité maximale rayonnant sur un réseau linéaire uniforme affectés par un bruit blanc uniforme, les matrices $\mathbf{R}_y$ et $\mathbf{R}'_y$ sont respectivement Toeplitz hermitienne et Hankel complexe dont le nombre d'équations indépendantes associées respectivement à ces deux matrices est de $2M-1$ et $4M-2$ et puisque le nombre des paramètres qui paramètrent ces deux matrices est de $\underbrace{K}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{2K}_{\mathbf{R}_x,\mathbf{R}'_x} + \underbrace{1}_{\sigma_n^2} = 3K+1$, nous obtenons donc la condition nécessaire suivante :

$$K \leq 2M-2,$$

alors que dans le cas de signaux sources non corrélés complexes circulaires au second ordre (i.e., $\mathbf{R}'_y = \mathbf{O}$), nous avons $K \leq M-1$.

5.5 CRB stochastique complexe gaussienne non circulaire

D'après la contrainte (5.3.7) (i.e., $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est structurée), l'estimateur du MV du paramètre $\boldsymbol{\alpha}$ devient un problème d'optimisation non standard. Malgré cette difficulté, nous allons démontrer que l'estimateur du MV du paramètre de DOA seul sous cette contrainte ou sans cette contrainte coïncident sous différents modèles de bruits. Par conséquent, les CRB stochastiques associées du paramètre de DOA seul sont identiques. Pour calculer ces CRB du paramètre de DOA seul nous considérons deux approches, une indirecte qui consiste à calculer la matrice de covariance asymptotique de l'estimateur du MV, et l'autre directe qui est basée sur la formule de Slepian-Bangs générale étendue (5.2.5).

5.6 Cas de bruit blanc uniforme

5.6.1 Estimateur du maximum de vraisemblance stochastique

Dans cette section, nous supposons que le bruit est blanc uniforme, i.e., $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$. En utilisant le théorème 5.1, la fonction log-vraisemblance est donnée par :

$$\mathrm{Log}(f(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})) = -(TM\log(\pi) + \frac{T}{2}\mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})] + \frac{T}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y},T})).$$

En supprimant le terme constant, l'estimateur du MV de $\boldsymbol{\alpha}$ est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{MV}} = \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{\alpha}} L(\boldsymbol{\alpha}),$$

où la fonction critère est définie comme[2]

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{T}{2}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})] + \mathrm{Tr}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y},T})\right), \tag{5.6.10}$$

avec $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ définie positive presque sûrement si et seulement si $T \geq 2M$.
Notons que grâce à l'approche présentée par Jaffer [44] dans le cas de signaux sources gaussiens complexes circulaires, les estimées du MV des paramètres de DOA $\boldsymbol{\theta}$, et les paramètres paramètrent la matrice de covariance des sources $\boldsymbol{\rho}$ et la puissance de bruit σ_n^2 peuvent être obtenues sous une forme séparable. L'avantage de cette approche est de réduire la dimension du problème d'optimisation à résoudre.
Nous adoptons cette approche en partant du modèle non structuré, nous démontrons que les estimées du MV données par le résultat suivant obtenues sous la contrainte (5.3.7) ou sans cette contrainte sont identiques.

Résultat 5.2 *Si la matrice de covariance empirique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ est définie positive, $K < M$, $\mathbf{A}$ de rang plein colonne, alors les estimées contenues dans $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{MV}}$ qui maximise la fonction* (5.6.10) *sous la contrainte* (5.3.7) *ou sans cette contrainte coïncident. Les expressions de ces estimées sont données par : $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}$ est obtenu en maximisant par rapport à $\boldsymbol{\theta}$, la fonction suivante :*

$$F_T(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{T}{2}(\log[\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \widehat{\sigma}_{n,\mathrm{MV}}^2\mathbf{I})]), \tag{5.6.11}$$

où $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}$ et $\widehat{\sigma}_{n,\mathrm{MV}}^2$ sont donnés par

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}} = [\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{R}_{\tilde{y},T} - \widehat{\sigma}_{n,\mathrm{MV}}^2\mathbf{I}]\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})[\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} \tag{5.6.12}$$

$$\widehat{\sigma}_{n,\mathrm{MV}}^2 = \frac{1}{M-K}\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})}^{\perp}\mathbf{R}_{y,T}\right), \tag{5.6.13}$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})}$ est la matrice de projection $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})$. En outre

$$\widehat{\mathbf{R}}_{x,\mathrm{MV}} = [\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{R}_{y,T} - \widehat{\sigma}_{n,\mathrm{MV}}^2\mathbf{I}]\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} \tag{5.6.14}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}'_{x,\mathrm{MV}} = [\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta})]^{-1}. \tag{5.6.15}$$

[2]Nous laissons ici le terme $-\frac{T}{2}$ pour simplifier les notations que nous utiliserons au paragraphe 5.7.3.

Preuve : En supposant que la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est non structurée, la maximisation de (5.6.10) par rapport aux différents paramètres se réduit à un problème standard de maximisation. En appliquant la même approche donnée par [44, 107] en remplaçant $\mathbf{R}_y$ par $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, les estimées de la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ et de σ_n^2 sont données respectivement par l'équation (5.6.12) et $\widehat{\sigma}^2_{n,\mathrm{MV}}$ avec

$$\widehat{\sigma}^2_{n,\mathrm{MV}} = \frac{1}{2M-2K}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\right). \tag{5.6.16}$$

Puisque les matrices $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$, $\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})$, $[\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}$ et $[\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H(\boldsymbol{\theta})$ sont toutes partitionnées sous la forme $\begin{bmatrix} (\diamond) & (\times) \\ (\times)^* & (\diamond)^* \end{bmatrix}$, la matrice donnée par l'expression (5.6.12) est aussi partitionnée de la même forme, c'est à dire structurée sous la contrainte (5.3.7). En remplaçant ces matrices partitionnées dans (5.6.12), nous obtenons après simplification des calculs les matrices $(\diamond)$ et $(\times)$ données respectivement par (5.6.14) et (5.6.15). Ensuite, en exploitant la structure des matrices $\mathbf{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta})} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta})} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y},T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,T} & \mathbf{R}'_{y,T} \\ \mathbf{R}'^*_{y,T} & \mathbf{R}^*_{y,T} \end{bmatrix}$ dans (5.6.16), nous obtenons (5.6.13). Enfin, nous remplaçons ces expressions estimées dans (5.6.10), on obtient la fonction (5.6.11) qui ne dépend que de DOA. Par conséquent, les estimées contenues dans $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{MV}}$ qui maximisent la fonction (5.6.10) sous la contrainte (5.3.7) ou sans cette contrainte coïncident. ■

5.6.2 Expressions de la CRB stochastique gaussienne non circulaire

Dans le cas de signaux sources complexes circulaires, l'expression de la CRB du paramètre de DOA seul a été obtenue d'une manière directe (grâce à la formule circulaire de Slepian-Bangs) dans [106] et d'une manière indirecte (grâce à l'analyse asymptotique de l'estimateur du MV qui est asymptotiquement efficace (pour un nombre d'observations très grande)) dans [107, 42]. Pour calculer l'expression de la CRB stochastique non circulaire, nous considérons dans la suite ces deux approches :

5.6.2.1 Approche indirecte

Grâce à l'analyse asymptotique de l'estimateur du MV stochastique autour des vrais paramètres et en adoptant la même preuve de l'expression de la matrice de covariance de l'estimateur du MV du paramètre de DOA seul de signaux sources complexes circulaires présentée dans [107], nous démontrons dans l'annexe 1 le résultat suivant :

Résultat 5.3 *Pour des sources gaussiennes complexes non circulaires (NCG),* $\sqrt{T}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}(T) - \boldsymbol{\theta}\right)$ *converge en loi vers une loi gaussienne centrée dont la matrice de*

covariance $\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ *est égale à la CRB. Ce qui implique :*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\left([\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}_x'\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{R}_x\\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix}\right)^T\right]\right\}^{-1} \tag{5.6.17}$$

avec $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = [\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_K]$ *où* $\mathbf{d}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_k}{d\theta_k}$.

Preuve : L'estimateur consistant $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}$ du MV de $\boldsymbol{\theta}$ est obtenu en maximisant la fonction $F_T(\boldsymbol{\theta})$ (5.6.11) qui ne dépend que de la statistique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$. Nous rappelons que d'après le résultat 5.2, l'estimateur du MV est insensible à la contrainte (5.3.7). Donc, pour dériver la matrice de covariance asymptotique $\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ de l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}$ du MV, nous procédons comme Stoica et *al* [107] en remplaçant respectivement $\mathbf{A}$ et $\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}$ par $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}$, et grâce à un calcul de perturbation, la matrice de covariance donnée par [107, rel. (3.5)] est remplacée par la matrice de covariance asymptotique $\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta})\right]^{-1}\left(\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left(\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]^T\right)\right)\left[\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta})\right]^{-1},$$

où $\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice gradient de $\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta})$ et la limite de la matrice Hessienne de $\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\theta})$ quand $T \to \infty$. De plus, il a été démontré [107] également dans le cas d'observations gaussiennes circulaires :

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left(\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]^T\right) = \mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{T\to\infty}\mathbf{F}_T''(\boldsymbol{\theta}),$$

grâce à un calcul séparé de la matrice Hessienne donnée dans [107, rel. (3.8)] et de la limite de la matrice $\mathrm{E}\left(\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]\left[\mathbf{F}_T'(\boldsymbol{\theta})\right]^T\right)$ donnée dans [107, rel. (3.17)]. Ce résultat confirme le théorème démontré dans [42, theorem 1] d'une manière plus précise. Par conséquent, grâce à ces résultats pour calculer la matrice $\mathbf{C}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$, il suffit de calculer la matrice $\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta})$. Nous adoptons dans l'annexe 1 la même méthode que celle de [107, Appendix B], pour calculer la matrice $\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta})$. ■

Remarque 5.5

Nous notons que pour des signaux sources gaussiens complexes circulaires (CG). $\mathbf{R}_x' = \mathbf{O}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \begin{pmatrix}\mathbf{R}_y & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_y^*\end{pmatrix}$. Par conséquent, (5.6.17) se réduite à

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\left(\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_x\right)^T\right]\right\}^{-1}. \tag{5.6.18}$$

Nous remarquons que cette expression a été dérivée d'une façon indirecte dans [107] et d'une façon directe à partir de la formule de Slepian-Bangs dans [106]. Donc

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathrm{CG}} = \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

En conséquence, la connaissance a priori "les sources sont gaussiennes circulaires" ne modifie pas la CRB.

5.6.2.2 Approche directe

Pour dériver la CRB du paramètre de DOA seul donnée par le résultat 5.3 directement à partir de la formule de Slepian-Bangs (5.2.5), nous rappelons tout d'abord que selon le résultat 5.2, l'estimateur du MV de $\boldsymbol{\theta}$ sous contrainte de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ (5.3.7) ou sans cette contrainte sur la matrice hermitienne $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ coïncident. Par conséquent, les CRB associées à ces deux modèles sont identiques. En utilisant le modèle sans contrainte avec $\boldsymbol{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} ((\Re([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,j}))_{1\leq j<i\leq 2K}, ([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,i})_{i=1,\ldots,2K})^T$ et en adoptant la même approche que celle de [106] où l'égalité clé $\text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = \mathbf{J}_1\boldsymbol{\rho}$ est aussi valable, où $\mathbf{J}_1$ est une matrice complexe non singulière constante, nous démontrons en annexe 2 l'expression (5.6.17) de la CRB du paramètre de DOA seul.

5.6.3 CRB déterministe

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression explicite de la CRB déterministe démontrée et analysée dans (par exemple, [107, 102, 69]) que nous comparons avec la CRB stochastique non circulaire dans le résultat 5.5. En reprenant le démonstration de [107] du cas circulaire, nous trouvons que l'expression de cette borne déterministe n'est pas modifiée dans le cas non circulaire et a pour expression :

$$\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\mathbf{R}_{x,T}^T\right]\right\}^{-1},$$

où $\mathbf{R}_{x,T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^H$. Pour un nombre d'observations très grand, nous obtenons la valeur asymptotique équivalente suivante :

$$\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\mathbf{R}_{x}^T\right]\right\}^{-1}, \tag{5.6.19}$$

$\mathbf{R}_x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^H$.

Dans le cas particulier d'une seule source, cette expression se simplifie sous la forme interprétable [107, rel. (2.11)] suivante :

$$\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1}\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2}, \tag{5.6.20}$$

où $\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{d}_1^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^{\perp}\mathbf{d}_1$ est un facteur purement géométrique.

Remarque 5.6

Notons que si des connaissances a priori sont prises en compte, d'autres expressions de la CRB déterministes peuvent être obtenues. Par exemple, l'expression asymptotique (5.6.21) suivante de la CRB déterministe a été obtenue dans [90, Lemma 1] sous l'hypothèse de signaux sources de non circularité maximale, i.e., $x_{k,t} = e^{i\phi_k/2}x'_{k,t}$ où $x'_{k,t}$ sont des paramètres réels. De plus, le modèle étendu [90, rel. (8)] pour laquelle a été dérivée cette expression est

paramétré par le vecteur des paramètres réels $\left(\boldsymbol{\theta}^T, (\Re(\mathbf{x}_t), \Im(\mathbf{x}_t))_{t=1,\ldots,T}, \sigma_n^2\right)^T$ qui ne prend pas ces connaissances a priori en compte.

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{U},\rho_{\mathrm{k}}=1}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}_{nc}^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}_{nc}}^{\perp} \mathbf{D}_{nc}\right) \odot \mathbf{R}_{x,T}^T\right]\right\}^{-1},$$

avec $\mathbf{D}_{nc} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}\boldsymbol{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{nc} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Delta}_\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_K})$. Pour un nombre d'observations très grand, nous obtenons la valeur asymptotique équivalente suivante :

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{U},\rho_{\mathrm{k}}=1}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{T}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}_{nc}^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}_{nc}}^{\perp} \mathbf{D}_{nc}\right) \odot \mathbf{R}_{x}^T\right]\right\}^{-1}. \tag{5.6.21}$$

De plus, notons que cette expression est obtenue également sous la contrainte que l'origine du repère des coordonnées est choisie au centre de phase de l'antenne, i.e., au barycentre des capteurs, de sorte que $\mathbf{J}\mathbf{a}_k^* = \mathbf{a}_k$. Un des prolongement de cette thèse serait de prendre totalement en compte cette information a priori, pour fournir une expression de la CRB déterministe sans tenir compte de cette dernière contrainte en remplaçant le modèle étendu [90, rel. (8)] par le modèle étendu suivant :

$$\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\boldsymbol{\Delta}_\phi \\ \mathbf{A}^*\boldsymbol{\Delta}_\phi^* \end{pmatrix} \mathbf{x}_t' + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_t \\ \mathbf{n}_t^* \end{pmatrix},$$

où le vecteur des paramètres réels est cette fois-ci est $\left(\boldsymbol{\theta}^T, (\phi_k)_{k=1,\ldots,K}, (\mathbf{x}_t')_{t=1,\ldots,T}^T, \sigma_n^2\right)^T$.

5.6.4 Cas d'une seule source

Dans le cas d'une seule source non circulaire de non circularité quelconque, l'expression de la CRB stochastique (5.6.17) peut être simplifiée sous une expression explicite donnée par le résultat suivant démontré en annexe 3 :

Résultat 5.4 *La CRB de la DOA d'une seule source gaussienne complexe non circulaire est une fonction de taux de non circularité, monotone décroissante dont l'expression est donnée par :*

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1}\left[\frac{2r_1^{-1} + \|\mathbf{a}_1\|^{-2}r_1^{-2} + \|\mathbf{a}_1\|^2 - \|\mathbf{a}_1\|^2\rho_1^2}{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 + 1 + (1 - \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1)\rho_1^2}\right], \tag{5.6.22}$$

où $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{x1}^2}{\sigma_n^2}$ *est le rapport signal sur bruit (SNR).*

Remarque 5.7
La $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ décroît de la CRB complexe circulaire $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1 r_1}\left(1 + \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}\right)$ (cas $\rho_1 = 0$) à la CRB complexe non circulaire $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1 r_1}\left(1 + \frac{1}{2\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}\right)$ (cas $\rho_1 = 1$). Mais elle est relativement insensible à l'augmentation de ρ_1 sauf pour de faibles valeurs du SNR (pour des valeurs de $\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1$ à l'ordre de l'unité) (cf. figure 5.1). Notons également que ces deux bornes coïncident avec la CRB déterministe (5.6.20) quand le SNR tend vers l'infini.

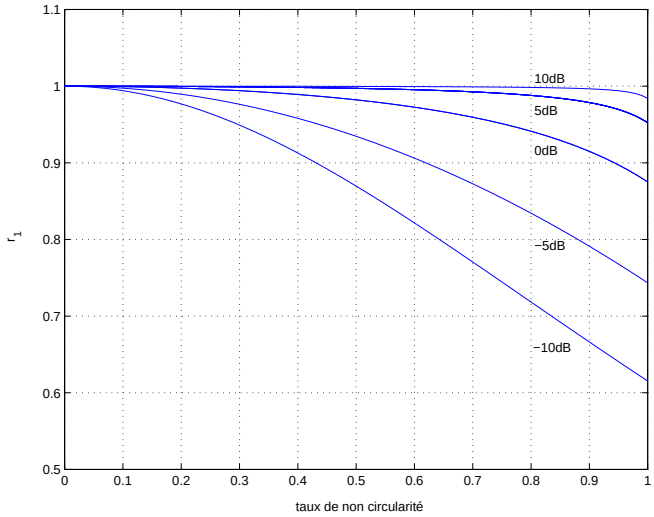

FIG. 5.1 – $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité ρ_1 pour plusieurs valeurs du SNR.

5.6.5 Comparaisons analytiques des CRB circulaires et non circulaires

Après avoir démontré une expression explicite de la CRB complexe non circulaire, nous comparons maintenant l'expression de la CRB (5.6.17) avec les expressions conventionnelles de la CRB données par les égalités (5.6.18) et (5.6.19) toutes dépendant de la même matrice de covariance $\mathbf{R}_x$. Grâce à des propriétés algébriques, nous démontons en annexe 4, le résultat suivant :

Résultat 5.5 *Si $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est définie positive, la CRB stochastique complexe non circulaire est bornée inférieurement [resp., supérieurement] par la la CRB déterministe [resp., la CRB stochastique complexe circulaire]*

$$\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\boldsymbol{\theta}). \tag{5.6.23}$$

Nous rappelons que la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ structurée est définie positive si et seulement si $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}_x - \mathbf{R}_x'^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_x'$ sont définies positives [94, 60]. Notons que $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ n'est pas définie positive lorsque les signaux sources sont spatialement non corrélés de non circularité maximale ($\rho_k = 1, k = 1, \ldots, K$) car dans ce cas les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}_x' = \mathbf{R}_x \boldsymbol{\Delta}_\phi$ sont non singulières avec $\mathbf{R}_x - \mathbf{R}_x'^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_x' = \mathbf{O}$.

Remarque 5.8
Il est démontré dans [107, result R9] grâce à une décomposition matricielle que pour des sources non corrélées affectées par un bruit blanc uniforme, les bornes $\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ sont égales lorsque les SNR *augmentent*. Nous remarquons qu'une démonstration plus précise de cette équivalence (cf. Résultat 5.12) est donnée dans le cas de bruit blanc non uniforme quand le SNR étendu défini par le résultat 5.12 tend vers l'infini, peut être étendue au cas de bruit blanc uniforme. En conséquence, d'après l'inégalité (5.6.23), nous déduisons également que la borne $\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ est équivalente à ces deux bornes.

5.6.6 Comparaisons numériques

Nous supposons qu'un réseau linéaire uniforme équidistant de $M = 6$ capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$, reçoit deux sources indépendantes de même puissance ($\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$) et émettant de signaux gaussiens de même taux de non circularité ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2$) et de phase de non circularité ϕ_1 et ϕ_2 avec $\text{SNR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_n^2}$. Notons que ces bornes sont calculées avec $T = 1$.

Les figures 5.2, 5.3 et 5.4 illustrent les résultats 5.3 et 5.5. Nous observons que la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ dépend du SNR, du taux de non circularité ρ, de la séparation angulaire $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ et de la séparation de phase de non circularité $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. La figure 5.2 prolonge la comparaison numérique entre la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ dans le cas d'une seule source (cf. figure 5.1) à deux sources. Nous constatons que la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ décroît quand le taux de non circularité augmente et cette décroissance devient de plus en plus importante pour de faible valeur de séparation angulaire.

La sensibilité de la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ à la séparation de phase de non circularité est illustrée par la figure 5.3. Cette robustesse est importante pour de faibles valeurs de séparation angulaire. Nous constatons que pour des grandes valeurs de séparation angulaire, la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ est insensible à la séparation de phase de non circularité où l'on trouve la CRB d'une seule source.

Conformément à notre résultat 5.5, la figure 5.4 montre que ces trois bornes deviennent identiques pour des grandes valeurs du SNR ($\geq 20dB$). D'autre part la différence entre ces bornes est importante seulement pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de séparation de phase de non circularité .

Puisque les expressions de la CRB (5.6.17) et (5.6.18) sont obtenues sans aucune connaissance a priori sur les signaux sources, il est intéressant de comparer la $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ avec l'expression $\mathbf{C}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)$ (cf. chapitre 4) non interprétable de la borne AMV qui tient compte de la connaissance a priori des sources non corrélées où les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont paramétrées par le modèle 2 défini par la remarque 4.3 du chapitre 4. La figure 5.5, montre que cette information a priori rend le rapport entre $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ et $\mathbf{C}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)$ largement inférieur à un et particulièrement pour des faibles valeurs de séparation angulaire. En conséquence la prise en compte ou non de cette connaissance a priori sera primordiale dans les performances statistiques des algorithmes associés.

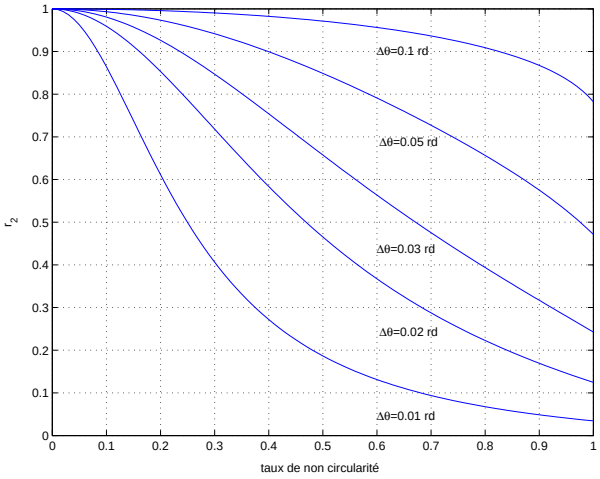

FIG. 5.2 – $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction du taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

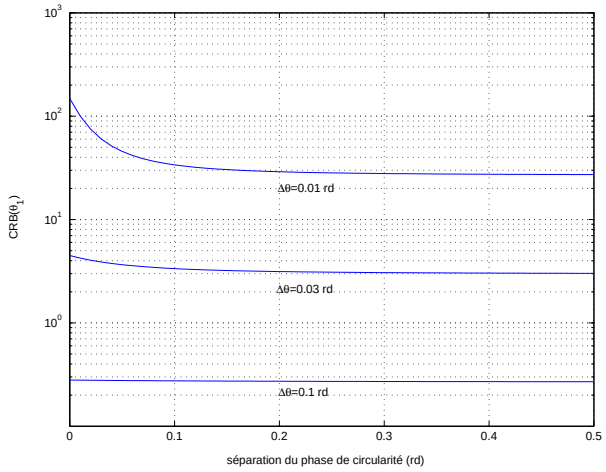

FIG. 5.3 – $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ normalisée en fonction de la séparation de phase de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire, $\rho = 1$ et SNR= $20dB$.

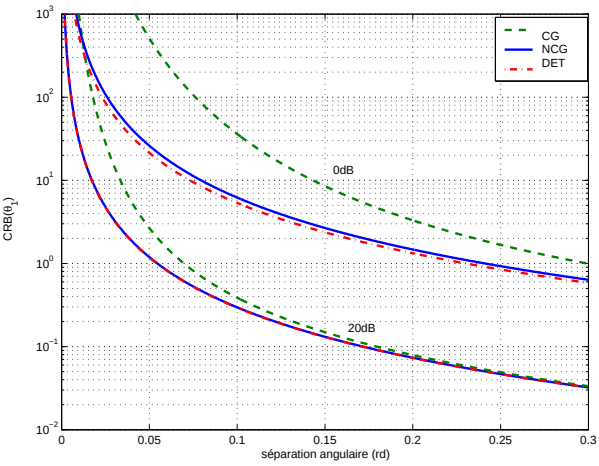

FIG. 5.4 – $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction de la séparation angulaire pour deux valeurs de SNR, $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

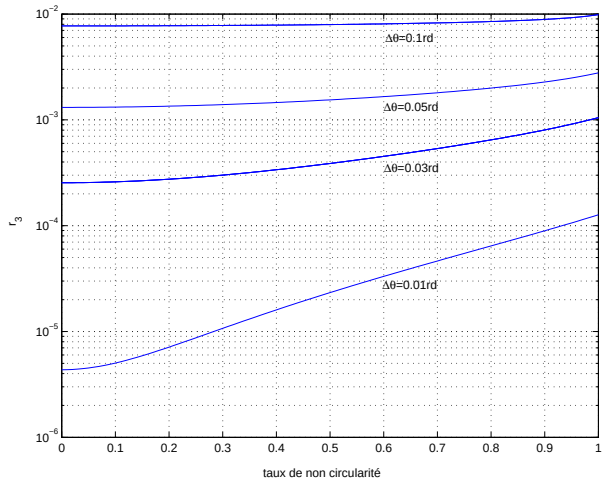

FIG. 5.5 – $r_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{C}^{\text{AMV}(R,R')}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour plusieurs valeurs de séparation angulaire pour SNR= $20dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

5.7 Cas de bruit arbitraire inconnu

Nous considérons le cas de bruit gaussien de matrice de covariance arbitraire inconnue paramétrée non nécessairement linéairement par un vecteur inconnu de paramètres identifiables. Nous adoptons la même méthodologie que celle utilisée dans le cas de bruit blanc uniforme. Nous démontrons que la CRB reste insensible à la contrainte (5.3.7), mais contrairement au cas de bruit blanc uniforme, il n'est pas possible d'obtenir une fonction de log-vraisemblance concentrée en $\boldsymbol{\theta}$ seule (comme c'était déjà le cas dans le cas circulaire (cf. par exemple [30, 122])). Ici nous ne pouvons obtenir qu'une fonction de log-vraisemblance concentrée en $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. Malgré cette difficulté, nous démontrons des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul en utilisant l'approche directe (grâce à la formule circulaire de Slepian-Bangs) présentée dans [32] et l'approche indirecte présentée dans [122] (grâce à l'analyse asymptotique de l'estimateur du MV). Ces bornes sont analysées et comparées avec les CRB conventionnelles gaussiennes complexes circulaires et avec la CRB déterministe.

5.7.1 Estimateur du maximum de vraisemblance stochastique

Nous remarquons que dans ce cas de bruit, l'expression de la fonction log-vraisemblance suivante donnée par l'égalité (5.6.10) reste valable

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{T}{2}\left(\mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{R}_{\tilde{y}})] + \mathrm{Tr}(\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y},T})\right), \tag{5.7.24}$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ est paramétrée cette fois par le paramètre $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ avec $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1 \ldots, \sigma_N)^T$. Due de la structure des matrices $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ et $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, l'estimateur du MV de $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})$ devient un problème d'optimisation sous contrainte qui n'est pas standard comme nous avons vu dans le cas de bruit blanc uniforme. Cependant, le résultat 5.2 s'étend au résultat suivant démontré en annexe 5 :

Résultat 5.6 *Si la matrice de covariance empirique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ est définie positive, $K < M$, $\mathbf{A}$ de rang plein colonne, alors les estimées conjointement $\{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}, \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2_{\mathrm{MV}}\}$ du MV qui maximisent la fonction log-vraisemblance* (5.7.24) *sous la contrainte* (5.3.7) *ou sans cette contrainte coïncident. Les expressions de ces estimées sont données par : $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}$ et $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{MV}}$ sont obtenues en maximisant par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\sigma}$*

$$F_T(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{T}{2}\left(\log[\mathrm{Det}(\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}})] + \mathrm{Tr}(\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y},T})\right), \tag{5.7.25}$$

où $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, avec $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}$, $\widehat{\mathbf{R}}_{x,\mathrm{MV}}$ et $\widehat{\mathbf{R}}'_{x,\mathrm{MV}}$ sont donnés par :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}} = [\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}]^{-1}[\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}][\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}]^{-1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{R}}_{x,\mathrm{MV}} \;=\; & [\breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\breve{\mathbf{A}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})]^{-1}[\breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\bar{\mathbf{R}}_{y,T}\breve{\mathbf{A}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}) - \\ & \breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\breve{\mathbf{A}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})][\breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\breve{\mathbf{A}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})]^{-1}\end{aligned} \tag{5.7.26}$$

et

$$\widehat{\mathbf{R}}'_{x,\mathrm{MV}} = [\breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\breve{\mathbf{A}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})]^{-1}\breve{\mathbf{A}}^H(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\bar{\mathbf{R}}'_{y,T}\breve{\mathbf{A}}^*(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})[\breve{\mathbf{A}}^T(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})\breve{\mathbf{A}}^*(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}})]^{-1} \tag{5.7.27}$$

avec $\bar{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}$, $\bar{\mathbf{R}}_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{R}_{y,T}\mathbf{Q}^{-1/2}$, $\bar{\mathbf{R}}'_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{R}'_{y,T}\mathbf{Q}^{-1/2}$ *et* $\breve{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$.

Remarque 5.9
Nous notons que la fonction de log-vraisemblance concentrée (5.7.25) associée à des observations complexes non circulaires est similaire à celle des observations complexes circulaires donnée par [30, rel. (55)]. Nous obtenons ici

$$F_T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{Q}_{\tilde{n}})] + \mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}} + \boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp})] + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}) \tag{5.7.28}$$

où $\bar{\mathbf{A}}$ et $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}$ sont données par (5.8.50) et (5.8.53), $\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}$ est la matrice de projection $\bar{\mathbf{A}}[\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}]^{-1}\bar{\mathbf{A}}^H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}^*} \end{bmatrix}$. En utilisant les structures similaires de $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, $\bar{\mathbf{A}}$ et $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}$, l'expression donnée par l'égalité (5.7.28) peut s'écrire comme

$$F_T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) = 2\Re\{\mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{Q}_n)] + \mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{B}_1)] + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\bar{\mathbf{R}}_{y,T})\} - \mathrm{Log}[\mathrm{Det}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_1^{*-1}\mathbf{B}_2^*\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2)]$$

où $\mathbf{B}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}_{y,T}\boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}} + \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}$ et $\mathbf{B}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}'_{y,T}\boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}^*}$. De plus, si les sources sont gaussiennes complexes circulaires au second ordre, i.e., $\mathbf{R}'_x = \mathbf{O}$, la matrice de covariance empirique $\bar{\mathbf{R}}'_{y,T}$ converge vers $\bar{\mathbf{R}}'_y = \mathbf{O}$ quand T tend vers ∞, et par conséquent, (5.7.28) s'approche à la fonction de log-vraisemblance donnée par l'égalité [30, rel. (55)].

5.7.2 Expressions de la CRB stochastique gaussienne non circulaire

D'après le résultat 5.6, les estimées des paramètres sous contrainte de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ (5.3.7) ou sans cette contrainte sur la matrice hermitienne $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ coïncident, et par conséquent les CRB associées sont également identiques. En utilisant le modèle sans contrainte paramétré par $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\rho}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$ où la matrice non structurée $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est paramétrée par le paramètre $\boldsymbol{\rho}$ contenant $4K^2$ paramètres réels sont $\boldsymbol{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} ((\Re([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,j}), \Im([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,j}))_{1\le j<i\le 2K}, ([\mathbf{R}_{\tilde{x}}]_{i,i}))_{i=1,\ldots,2K})^T$. Avec ce modèle, nous démontrons dans l'annexe 6, le résultat suivant en adoptant la preuve donnée dans [32] avec des sources gaussiennes complexes circulaires, où l'égalité clé $\mathrm{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{x}}) = \mathbf{J}_1\boldsymbol{\rho}$ de la dérivation reste ainsi valable, avec $\mathbf{J}_1$ est une matrice non singulière constante.

Résultat 5.7 *La CRB du paramètre de DOA seul associée à des sources NCG en présence de bruit arbitraire inconnue (AU) est donnée par l'expression explicite suivante :*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2T}\left\{\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H\boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left([\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H, \mathbf{R}'_x\breve{\mathbf{A}}^T]\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x \\ \breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix}\right)^T\right] - \mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}^{-1}}\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}^T}\right\}^{-1}, \tag{5.7.29}$$

où

$$\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\Re\left\{\mathcal{Q}^T\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\otimes(\mathbf{G}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T\right]\mathcal{P}^*\right\}+2\Re\left\{\mathcal{Q}^T\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\otimes(\mathbf{G}'\breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_s'^*)^T\right]\mathcal{P}^*\right\} \tag{5.7.30}$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 4\Re\left\{\mathcal{P}^H\left[\mathbf{G}^T\otimes\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\right]\mathcal{P}\right\}-2\left(\mathcal{P}^H\left[(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\otimes\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\right]\mathcal{P}\right), \tag{5.7.31}$$

avec

$$\mathcal{Q}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left[\mathrm{vec}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T),\mathrm{vec}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T),\ldots,\mathrm{vec}(\mathbf{e}_K\mathbf{e}_K^T)\right],\quad \mathcal{P}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left[\mathrm{vec}(\bar{\mathbf{Q}}_n^1),\mathrm{vec}(\bar{\mathbf{Q}}_n^2),\ldots,\mathrm{vec}(\bar{\mathbf{Q}}_n^N)\right],$$

où $\mathbf{Q}_n^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})}{d\sigma_k}$, $\bar{\mathbf{Q}}_n^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{Q}_n^k\mathbf{Q}_n^{-1/2}$, $\breve{\mathbf{A}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{A}$, $\breve{\mathbf{D}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d\breve{\mathbf{A}}}{d\boldsymbol{\theta}}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}$, $\bar{\mathbf{R}}_y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{R}_y\mathbf{Q}_n^{-1/2}$, $\bar{\mathbf{R}}_y' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{R}_y'\mathbf{Q}_n^{-1/2}$, $\mathbf{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\bar{\mathbf{R}}_y-\bar{\mathbf{R}}_y'\bar{\mathbf{R}}_y^{*-1}\bar{\mathbf{R}}_y'^*\right)^{-1}$ *et* $\mathbf{G}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\mathbf{G}\bar{\mathbf{R}}_y'\bar{\mathbf{R}}_y^{*-1}$.

Quand le bruit est spatialement non corrélé avec des puissances différentes sur les capteurs (bruit blanc non uniforme (NU)) $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_M^2)$, le résultat 5.7 prend la forme suivante dont la démonstration est donnée dans l'annexe 7 :

Résultat 5.8 *Pour des sources complexes non circulaires gaussiennes affectées par un bruit non uniforme, la CRB du paramètre de DOA seul est donnée par l'expression explicite suivante :*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2T}\left\{\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left([\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H,\mathbf{R}_x'\breve{\mathbf{A}}^T]\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x\\ \breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix}\right)^T\right] -\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}\,-1}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}\,T}\right\}^{-1}, \tag{5.7.32}$$

où

$$\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}} = 2\Re\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\odot(\mathbf{G}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T+(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\odot(\mathbf{G}'\breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_x'^*)^T\right] \tag{5.7.33}$$

$$\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}} = 2\left(\mathbf{G}^T\odot\mathbf{G}-(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\mathbf{G})^T\odot(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\mathbf{G})\right). \tag{5.7.34}$$

Remarque 5.10

1. Notons que dans le cas de signaux sources complexes circulaires au second ordre, $\mathbf{R}_x' = \mathbf{O}$ et par conséquent $\mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix}\mathbf{R}_y & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_y^*\end{bmatrix}$, $\mathbf{G}' = \mathbf{O}$ et $\mathbf{G} = \bar{\mathbf{R}}_y^{-1}$. En remplaçant ces matrices dans les expressions de la CRB données par (5.7.29) et (5.7.32) associées respectivement au bruit arbitraire inconnue et au blanc non uniforme, nous déduisons les expressions suivantes dérivées toutes les deux à partir de la formule de Slepian-Bangs gaussienne complexe circulaire dans [32] et [72], respectivement

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathrm{CG}} = \mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2T}\left\{\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_s\breve{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_s\right)^T\right] -\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}\,-1}\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}\,T}\right\}^{-1},$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}} &= 2\Re\left\{\mathcal{Q}^T\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\otimes(\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T\right]\mathcal{P}^*\right\},\\ \mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}} &= 4\Re\left\{\mathcal{P}^H\left(\bar{\mathbf{R}}_z^{-T}\otimes\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)\mathcal{P}\right\}-2\left(\mathcal{P}^H\left((\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\otimes\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)\mathcal{P}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathrm{CG}} &= \mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2T}\left\{\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x\right)^T\right]\right.\\ &\qquad\left.-\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}\,-1}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}\,T}\right\}^{-1},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}} &= 2\Re\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\odot(\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T\right]\\ \mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}} &= 2\left(\bar{\mathbf{R}}_y^{-T}\odot\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}-(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}_y^{-1})^T\odot(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}_y^{-1})\right).\end{aligned}\tag{5.7.35}$$

En conséquence comme dans le cas de bruit blanc uniforme, nous déduisons que la connaissance a priori de circularité ne modifie pas la CRB.

2. Nous remarquons que ces quatre expressions $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ de la CRB stochastique complexes circulaires ou non contiennent le terme additionnel $-\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}^T$, due au non découplage entre les paramètres de DOA et les paramètres de bruit dans la FIM comme nous avons vu dans les annexes. Par contre, dans le cas de bruit blanc uniforme, les paramètres de DOA et de bruit sont découplés dans la FIM [66, 42].

5.7.3 Approche indirecte

D'après le résultat 5.6, nous avons démontré que la dimension du problème d'optimisation est réduite en se ramenant à une fonction de log-vraisemblance concentrée (5.7.25) qui ne dépend que de $\boldsymbol{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\sigma}^T)^T$. De plus, l'estimateur du MV de $\boldsymbol{\beta}$ sous contrainte de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ (5.3.7) ou sans cette contrainte sur la matrice hermitienne $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ coïncident. Dans cette section, nous calculons l'expression de $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ directement à partir de la fonction concentrée (5.7.25) en adoptant les même étapes que la preuve présentée dans [122] sous l'hypothèse de signaux sources circulaires. [122] utilise le théorème [42, Theorem 1] qui affirme qu'en présence de paramètres utiles $\boldsymbol{\beta}$ et nuisible $\boldsymbol{\rho}$, la CRB sur le paramètre $\boldsymbol{\beta}$ est donnée par l'inverse de la limite pour T tend vers l'infini de la matrice Hessienne de la fonction log-vraisemblance concentrée en $\boldsymbol{\beta}$ (5.7.25). Appliqué au cas gaussien non circulaire :

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\beta}) = \left(\lim_{T\to+\infty}\frac{\partial^2 F_T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}\right)^{-1},$$

où $\frac{\partial^2 F_T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}$ est donnée [42] par :

$$\left(\frac{\partial^2 F_T(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}\right)_{k,l} = \frac{T}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial\beta_k}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\frac{\partial\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial\beta_l}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\right).\tag{5.7.36}$$

Par suite, en utilisant le partitionnement $\mathbf{CRB}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{2}{T}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}} & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}^T & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}} \end{pmatrix}^{-1}$, nous obtenons grâce au lemme d'inversion matricielle la CRB du paramètre de DOA seul :

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{T}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}} - \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}}^{-1}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}^T\right)^{-1}.$$

Notons que cette borne est invariante par rapport à une transformation linéaire du paramètre de bruit tel que si $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$ où $\mathbf{B}$ est une matrice régulière, alors $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}} = \mathbf{B}^T\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}'}\mathbf{B}$ et $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}'}\mathbf{B}$. Par conséquent

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}}{}^{-1}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}^T = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}'}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}'}{}^{-1}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}'}^T.$$

Nous démontrons en annexe 8, les expressions suivantes :

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}})_{k,p} = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial\theta_k}\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial\theta_p}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right)\right\}, \tag{5.7.37}$$

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}})_{k,p} = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\check{\mathbf{Q}}_n^k\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^p\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\right)\right\} - \mathrm{Tr}\left(\check{\mathbf{Q}}_n^k\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^p\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\right), \tag{5.7.38}$$

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\sigma}})_{k,p} = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}^H}{\partial\theta_k}\boldsymbol{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^p\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right)\right\}. \tag{5.7.39}$$

Notons que ces expressions restent valables quelque soit la dimension des vecteurs qui paramètrent les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$. Dans le cas où chaque colonne de $\mathbf{A}$ est paramétrée par un paramètre scalaire θ_k, on trouve les expressions (5.8.55), (5.8.57) et (5.8.56), i.e., $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}} = \mathbf{F}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}} = \mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}$ et $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\sigma}} = \mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}$ données dans l'annexe 6. D'où l'expression de $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$.
De même pour la paramétrisation de $\mathbf{Q}_n$ arbitrairement diagonale, l'expression de $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ est obtenue en utilisant les expressions (5.8.55), (5.8.57) et (5.8.56), comme le montre l'annexe 7.

5.7.4 Comparaisons des CRB circulaires et non circulaires

Dans cette section, nous comparons analytiquement sous différents modèles de bruit, les CRB stochastiques complexes non circulaires données par les résultats 5.7 et 5.8 avec les CRB conventionnelles complexes circulaires rappelées dans la remarque 5.10 et avec la CRB déterministe démontrée dans [72] et donnée par l'égalité (5.7.40).
Nous remarquons tout d'abord que dans le cas de bruit blanc spatialement uniforme (U) soit $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}$, la matrice $\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}$ devient un vecteur de dimension $K \times 1$ telle que $\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}} = (m_1, \ldots, m_K)^T = (m_1, \ldots, m_K)^T$ et $\mathbf{Q}_n^1 = \mathbf{I}$. Puisque les colonnes de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{A}}$ engendrent le même sous espace, nous obtenons à partir de l'égalité (5.8.56) :

$$m_k = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{D}_k^H\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_k\right)\right\} = 0.$$

Par conséquent, les expressions de la CRB associées aux bruit AU et NU données par les égalités (5.7.29) et (5.7.32) peuvent être reliées à l'expression de la CRB donnée par l'égalité (5.6.17) associée au bruit blanc uniforme. Plus précisément, nous démontrons en annexe 9 le résultat suivant :

Résultat 5.9 *Si le bruit est paramétré par $N > 1$ paramètres réels alors,*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} \geq \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \quad et \quad \mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} \geq \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Puisque les quatre expressions de $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ contiennent un terme additionnel, des comparaisons analytiques de ces bornes semblent difficiles, contrairement au cas de bruit blanc uniforme où les deux bornes $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ sont comparées analytiquement dans le résultat 5.5. Cependant, grâce à la propriété d'efficacité asymptotique de l'estimateur du MV, le résultat suivant démontré en l'annexe 10 compare les bornes $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ [resp. $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$] et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ [resp. $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$] associées à la même matrice de covariance $\mathbf{R}_x$ et à la même matrice de covariance de bruit $\mathbf{Q}_n$.

Résultat 5.10 *La CRB stochastique complexe non circulaire est bornée supérieurement par la CRB stochastique complexe circulaire associée aux mêmes matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{Q}_n$.*

$$\mathbf{CRB}_{R_x,Q_n}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{CRB}_{R_x,Q_n}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Remarque 5.11
Nous notons que la seconde inégalité donnée par le résultat 5.5 et l'inégalité donnée par le résultat 5.10 ne sont pas générales pour tout paramètre dans le cas de modèles gaussiens complexes centrés circulaires et non circulaires associés de même première matrice de covariance comme le montre le contre exemple suivant :
Soit y, une variable aléatoire de distribution gaussienne complexe centrée circulaire $\mathcal{N}_c\left(0;\sigma_x^2,0\right)$ ou non circulaire $\mathcal{N}_c\left(0;\sigma_x^2,\sigma_x^2\rho e^{i\phi}\right)$. En calculant la FIM donnée par le résultat 5.1 où $\mathbf{m}_{\tilde{y}} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho e^{i\phi} \\ \rho e^{-i\phi} & 1 \end{pmatrix}$ paramétrée par $(\sigma_x^2, \rho, \phi)^T$, on obtient aisément :

$$\begin{aligned} \mathrm{CRB}^{\mathrm{NCG}}(\sigma_x^2) &= (1+\rho^2)\sigma_x^4, \\ \mathrm{CRB}^{\mathrm{CG}}(\sigma_x^2) &= \mathrm{CRB}^{\mathrm{NCG}}(\sigma_x^2)|_{\rho=0} = \sigma_x^4, \end{aligned}$$

soit

$$\mathrm{CRB}^{\mathrm{NCG}}(\sigma_x^2) > \mathrm{CRB}^{\mathrm{CG}}(\sigma_x^2).$$

Nous comparons maintenant la CRB stochastique non circulaire et déterministe asymptotique associées au bruit AU ou NU. Nous rappelons que l'expression de la CRB déterministe est démontrée dans [72] avec signaux sources circulaires, qui reste valable dans le cas de signaux sources non circulaires dont l'expression asymptotique (pour un nombre d'observations très grandes) est donnée par :

$$\mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2T}\left\{\Re\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}) \odot \mathbf{R}_x^T\right]\right\}^{-1}. \tag{5.7.40}$$

Remarque 5.12
Nous observons que les bornes stochastiques $\mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ contiennent un terme additionnel due au non découplage entre les paramètres de DOA et de bruit dans la FIM, d'où la comparaison donnée par le résultat 5.9. Par contre dans le modèle déterministe, les paramètres de DOA et de bruit sont découplés dans la FIM [72, Appendix B], d'où l'expression de la borne déterministe $\mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ obtenue directement à partir de la FIM :

$$\mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} = \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Dans le cas particulier d'une seule source, nous obtenons l'expression asymptotique interprétable suivante :

$$\mathrm{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1' r_1'},$$

où $r_1' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\sigma_{x_1}^2}{M}\mathbf{a}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{a}_1$ et α_1' est un facteur qui dépend de bruit $\left(\frac{2\|\mathbf{a}_1\|^2}{\mathbf{a}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{a}_1}\right)\breve{\mathbf{d}}_1^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{a}}_1}^{\perp}\breve{\mathbf{d}}_1$ avec $\breve{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{a}_1$ et $\breve{\mathbf{d}}_1 = \frac{d\breve{\mathbf{a}}_1}{d\theta_1}$. Dans le cas de bruit blanc uniforme, ces facteurs r_1' et α_1' deviennent respectivement r_1 et α_1, d'où l'expression de la borne déterministe associée au bruit blanc uniforme donnée par l'égalité (5.6.20).

Nous démontrons dans l'annexe 11, le résultat suivant :
Résultat 5.11 *Si* $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ *est non singulière alors*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Notons que la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ peut être singulière bien que $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}_x^{'}$ soient non singulières, par exemple quand les sources sont non corrélées de non circularité maximale. Ce dernier résultat 5.11 s'étend à ce cas particulier de signaux sources comme nous le démontrons dans l'annexe 11.

Nous rappelons qu'il a été démontré dans [107, result R9] grâce à une décomposition matricielle que pour des sources non corrélées affectées par un bruit blanc uniforme, les bornes $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ "sont égales lorsque les SNR augmentent". Pour démontrer ce résultat d'une façon précise en faisant tendre tous les SNR vers l'infini, nous imposons la contrainte que les rapports de puissances entre capteurs d'un part et entre sources d'autre part soient constants. Soit $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{Q}_n'$ et $\mathbf{R}_x = \sigma^2\mathbf{R}_x''$ avec $\mathbf{Q}_n'$ et $\mathbf{R}_x''$ deux matrices diagonales fixées. Dans le cas de sources complexes circulaires non corrélées affectées par un bruit blanc non uniforme, nous démontrons en annexe 12, le résultat suivant :

Résultat 5.12 *Sous les contraintes suivantes* $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{Q}_n'$ *et* $\mathbf{R}_x = \sigma^2\mathbf{R}_x''$ *avec* $\mathbf{Q}_n'$ *et* $\mathbf{R}_x''$ *deux matrices diagonales fixées, les deux bornes* $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$ *et* $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ *sont équivalentes quand le SNR étendu* σ^2/σ_n^2 *tend vers l'infini :*

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1(\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\sigma_{x_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2(\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\sigma_{x_2}^2} \end{bmatrix},$$

avec $\beta_k(\theta_1,\theta_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\tilde{\mathbf{d}}_k^H\mathbf{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{d}}_k,\ k=1,2.$

Nous notons que cette contrainte permet d'avoir un résultat plus précis que celui obtenu dans [107] pour lesquels les CRB devenaient égales ("à zéro") lorsque les SNR augmentaient !

Remarque 5.13
Nous déduisons à partir des résultats 5.10, 5.11 et 5.12 que, quand le SNR étendu σ^2/σ_n^2 tend vers l'infini, les trois bornes $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ sont équivalentes :

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

5.7.5 Cas d'une seule source

Dans le cas particulier d'une seule source, nous démontrons dans l'annexe 13 que la CRB stochastique donnée par le résultat 5.8 peut être simplifiée comme le montre le résultat suivant :

Résultat 5.13 *La CRB de la DOA d'une source complexe non circulaire affectée par un bruit blanc non uniforme est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1'}\left[\frac{2{r_1'}^{-1} + \|\mathbf{a}_1\|^{-2}{r_1'}^{-2} + \|\mathbf{a}_1\|^2 - \|\mathbf{a}_1\|^2\rho_1^2}{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1' + 1 + (1 - \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1')\rho_1^2}\right], \tag{5.7.41}$$

où $r_1' \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\sigma_{x_1}^2}{M}\mathbf{a}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{a}_1 = \frac{\sigma_{x_1}^2}{M}\sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2}$ *est le SNR défini comme dans [72, rel. (48)], et* $\alpha_1' = \left(\frac{2\|\mathbf{a}_1\|^2}{\mathbf{a}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{a}_1}\right)\breve{\mathbf{d}}_1^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{a}}_1}^{\perp}\breve{\mathbf{d}}_1 = 2M\left(\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}\right)^{-1}\breve{\mathbf{d}}_1^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{a}}_1}^{\perp}\breve{\mathbf{d}}_1$.

Notons que (5.7.41) est similaire à l'expression obtenue dans le cas de bruit blanc uniforme dans le résultat 5.4, sauf qu'ici le terme α_1' donné par le résultat 5.13 n'est plus un facteur purement géométrique. Cependant, nous pouvons faire la même conclusion que dans le cas de bruit blanc uniforme : la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ décroît d'une façon monotone de la CRB complexe circulaire $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1' r_1'}\left(1 + \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1'}\right)$ (cas $\rho_1 = 0$) à la CRB complexe de non circulaire maximum $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T\alpha_1 r_1'}\left(1 + \frac{1}{2\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1'}\right)$ (cas $\rho_1 = 1$) comme l'illustre la figure 5.6. Mais elle est relativement insensible à l'augmentation de ρ_1 sauf pour des faibles valeurs du SNR ($r_1 \leq \|\mathbf{a}_1\|^{-2}$). De plus

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}{1 + \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1}\right)\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1),$$

d'où

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) & \text{si } \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 \ll 1 \\ \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) & \text{si } \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1 \gg 1. \end{cases}$$

Remarque 5.14
Nous remarquons qu'une expression de $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ a été démontrée dans [72, rel. (46)] sous une autre forme moins interprétable. Cependant, dans le cas d'un bruit AU, une expression explicite de $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ semble difficile à obtenir à partir de l'expression générale donnée par le résultat 5.7 à cause du terme additionnel $\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}\,-1}\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}\,T}$.

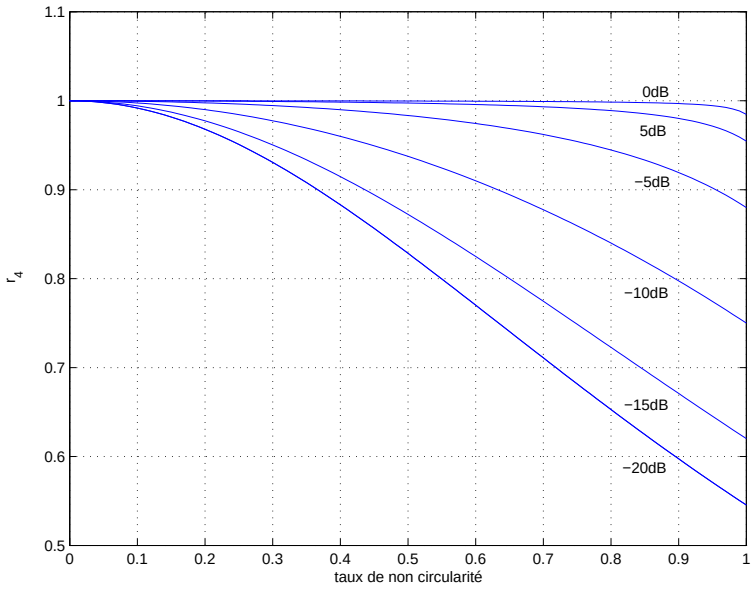

FIG. 5.6 – $r_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)}{\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de taux de non circularité pour différentes valeurs de SNR pour un réseau linéaire uniforme de M capteurs.

5.7.6 Comparaisons numériques

Cette section illustre les résultats 5.7 à 5.12 et compare les CRB stochastiques complexes non circulaires avec les CRB stochastiques complexes circulaires et avec la CRB déterministe sous différents modèles de bruit. Nous supposons qu'un réseau linéaire équidistant de $M = 10$ capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$, reçoit deux sources indépendantes de même puissance émettant de signaux gaussiens non circulaires de même taux de non circularité ($\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 = \rho_2$) et de phase de non circularité ϕ_1 et ϕ_2. Notons que ces bornes sont calculées pour $T = 1$. Nous supposons que le bruit est modélisé par une des trois matrices de covariance $\mathbf{Q}_n^{(i)}, i = 1, 2, 3$ tels que les deux premiers modèles et le troisième modèle sont donnés respectivement dans [32] et [72].

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_n^{(1)}(k,l) &= \sigma_n^2 \exp(-(k-l)^2\zeta) \\
\mathbf{Q}_n^{(2)}(k,l) &= \sigma_n^2 \exp(-|k-l|\zeta) \\
\mathbf{Q}_n^{(3)} &= \text{Diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_M^2).
\end{aligned}$$

Notons que $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n^2, \zeta)^T$ avec les deux premiers modèles de bruit où ζ est un paramètre caractéristique. Dans ce cas de bruit le SNR est défini par $\frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_n^2}$. Dans le cas du troisième modèle de bruit blanc non uniforme $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{10}^2)^T = (10.0, 2.0, 1.5, 0.5, 8.0, 0.7, 1.1, 3.0, 6.0, 3.0)^T$ et le SNR est défini comme dans [72] par $\frac{\sigma_{x_1}^2}{M}\mathbf{a}_k^H \mathbf{Q}_n^{(3)^{-1}} \mathbf{a}_k = \frac{\sigma_{x_1}^2}{10}\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{\sigma_i^2}$.

La figure 5.7 compare les $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$, $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{CG}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{AU}}^{\text{DET}}(\theta_1)$ en utilisant les deux premiers modèles de bruit et en faisant varier ζ. Nous observons que lorsque ζ décroît les trois CRB approchent zéro car dans ce cas $\mathbf{Q}_n$ devient singulière. Par ailleurs, pour des

grandes valeurs de ζ, ces deux modèles convergent vers un bruit blanc uniforme (i.e., $\mathbf{Q}_n^{(1)} = \mathbf{Q}_n^{(2)} = \sigma_n^2\mathbf{I}$) et chacune des trois CRB associées à ces deux modèles coïncident. Dans ce cas, nous constatons également une grande différence entre $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, cette dernière s'approchant de la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1)$.

Dans toutes les figures suivantes, nous supposons que le bruit est blanc non uniforme dont la matrice de covariance est donnée par le modèle 3.

La figure 5.8 illustre les résultats 5.11 et 5.12, en comparant les $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1)$. Nous observons que la différence entre $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ augmente quand la séparation angulaire et le SNR prennent des valeurs très faibles. Cependant, pour des grandes valeurs de SNR ces trois bornes coïncident.

Sur les figures 5.9 et 5.10, nous comparons $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ à travers le rapport $r_4 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)/\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$. Nous observons que ce rapport est sensible à la séparation angulaire, au taux de circularité et au SNR. La figure 5.9 prolonge la figure 5.6 à deux sources indépendantes de même puissance et de même taux de non circularité. Nous observons que $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ décroît quand le taux de non circularité augmente et cette décroissance devient importante pour des faibles valeurs de séparation angulaire. La figure 5.10 montre que ce rapport r_4 décroît quand la séparation angulaire et le SNR prennent des valeurs très faibles.

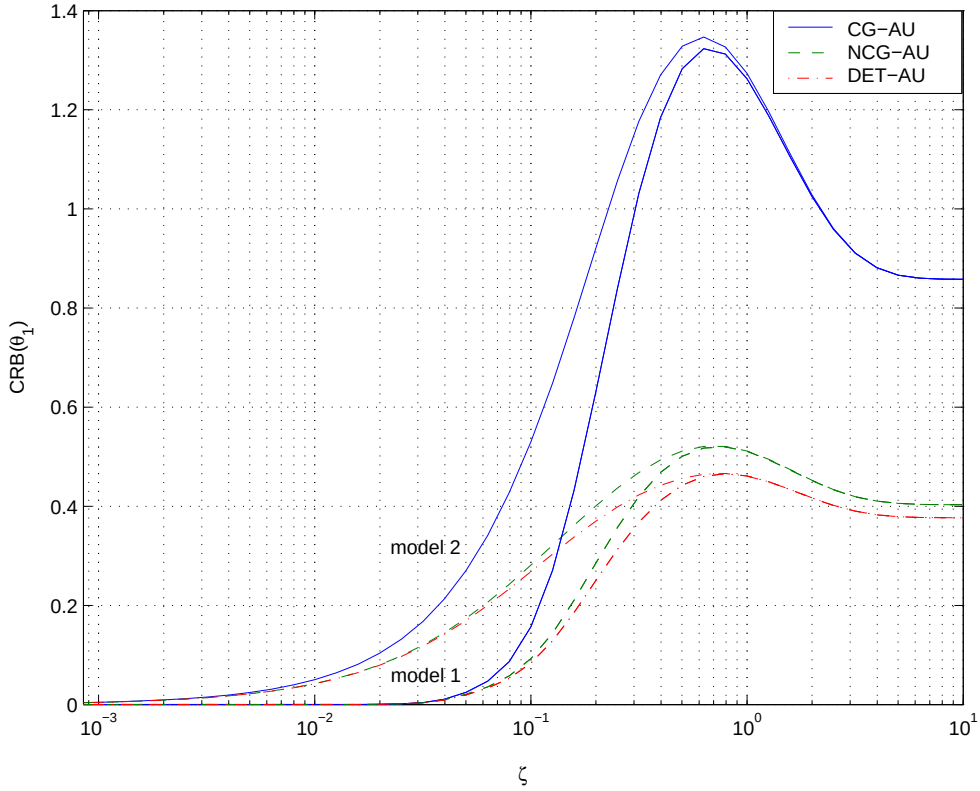

FIG. 5.7 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction du ζ avec les modèles 1 et 2 avec $\Delta\theta = 0.1rd$, $\rho = 1$, SNR$= 0dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

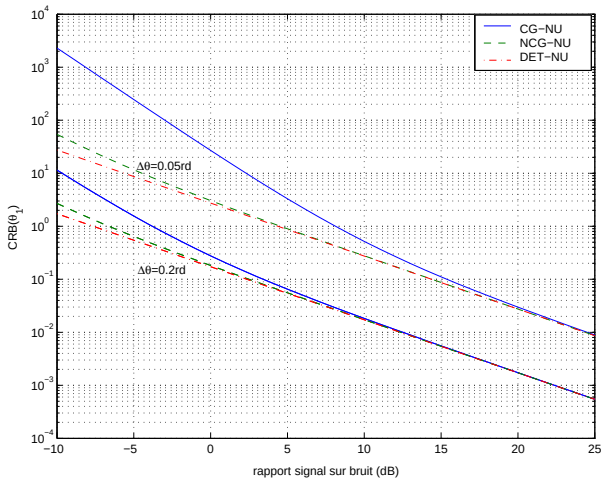

FIG. 5.8 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1)$ normalisées en fonction du SNR pour différentes valeurs de séparation angulaire avec $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

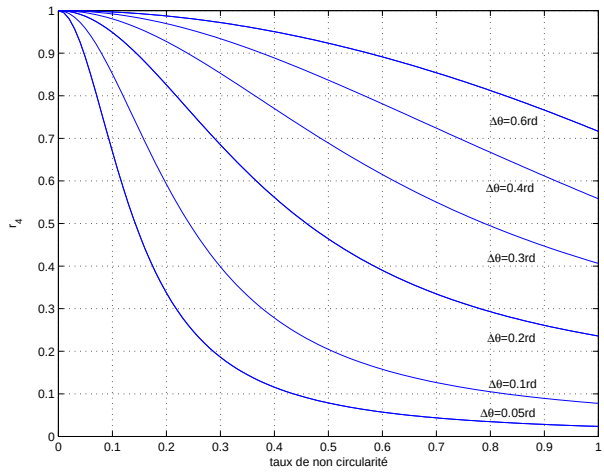

FIG. 5.9 – $r_4 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)}$ en fonction du taux de non circularité pour différentes valeurs de séparation angulaire avec SNR$= -5dB$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

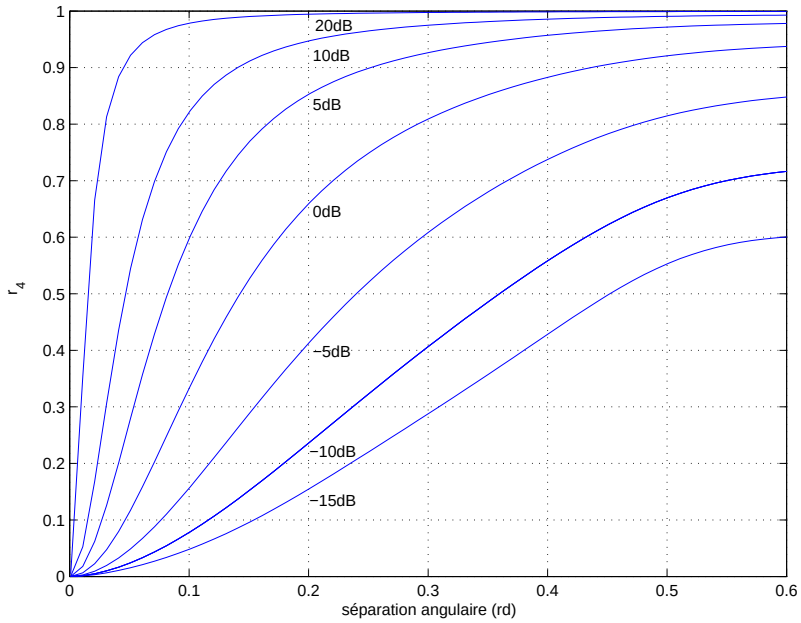

FIG. 5.10 – $r_4 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de séparation angulaire pour différentes valeurs du SNR avec $\rho = 1$ et $\Delta\phi = \pi/6rd$.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la formule de Slepian-Bangs complexe circulaire au cas d'observations complexes non circulaires. Ensuite nous nous sommes concentrés sur l'estimation du paramètre de DOA de signaux sources complexes non circulaires. Dans le cas de modèle de bruit quelconque, nous avons démontré la propriété clé suivante : la maximisation de la fonction de log-vraisemblance par rapport aux paramètres de DOA est robuste par rapport à la structure de la matrice de covariance étendue des sources.
Par conséquent, des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul sont obtenues de deux façons différentes, à partir de l'analyse asymptotique de l'estimateur du MV au voisinage des vrais paramètres (approche indirecte) ou de la formule générale de Slepian-Bangs (approche directe) sous différents modèles de bruits.
Nous avons démontré diverses propriétés de ces bornes et en particulier dans le cas d'une seule source affectée par un bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme. La CRB donnée par une expression explicite décroît d'une façon monotone quand le taux de non circularité augmente, mais cette augmentation n'est sensible que pour des faibles valeurs de SNR. Des comparaisons analytiques et numériques confirment que la CRB gaussienne complexe non circulaire est largement inférieure à la CRB gaussienne complexe circulaire pour des faibles valeurs de séparation angulaire, de séparation de phase de non circularité ou de SNR. Dans le cas de sources indépendantes affectées par un bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme, nous avons démontré que les CRB gaussiennes complexes circulaires, gaussiennes complexes non circulaires et la CRB déterministe sont équivalentes quand les SNR tendent vers l'infini.

Annexes

Annexe 1 : Preuve de (5.6.17)

A partir du résultat 5.2, les estimées du MV de DOA sont obtenues en maximisant la fonction (5.6.11) concentrée autour du paramètre de DOA seul, qui peut s'écrire comme

$$\mathbf{F}_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{T}{2}\text{Log}\left(\text{Det}\left[\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}} + \widehat{\sigma}^2_{n,\text{MV}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}}\right]\right). \tag{5.8.42}$$

En différentiant (5.8.42) par rapport à θ_k afin d'adopter une procédure similaire de celle de [107], on obtient après quelques manipulations algébriques que la matrice gradient stochastique a pour expression :

$$\left(\mathbf{F}'_T(\boldsymbol{\theta})\right)_k = T\Re\left\{\text{Tr}\left(\left[\left(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} - \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}\right]\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}}\partial_k\tilde{\mathbf{A}}\right)\right\},\ \ k = 1,\ldots,K \tag{5.8.43}$$

avec $\partial_k\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \partial_k\mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \partial_k\mathbf{A}^* \end{pmatrix}$ où $\partial_k\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{A}}{d\theta_k} = [\mathbf{0},\ldots,\mathbf{d}_k,\ldots,\mathbf{0}]$. En exploitant la structure de $\tilde{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$, l'équation (5.8.43) devient

$$\left(\mathbf{F}'_T(\boldsymbol{\theta})\right)_k = 2T\Re\left[\mathbf{h}^H_{k,T}\mathbf{R}_{y,T}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}}\mathbf{d}_k + \mathbf{g}^H_{k,T}\mathbf{R}'^*_{y,T}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}}\mathbf{d}_k\right],\quad k = 1,\ldots,K \tag{5.8.44}$$

où $\mathbf{h}^H_{k,T}$ et $\mathbf{g}^H_{k,T}$ sont respectivement les $k$ième lignes des matrices

$$\left[\left(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}_{(1:K,1:K)} - \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\right]\mathbf{A}^H \quad\text{et}\quad \left(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1}_{(1:K,K+1:2K)}\mathbf{A}^T.$$

En dérivant (5.8.43) par rapport θ_l, en utilisant le fait que, $\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbf{O}$, les éléments de la matrice Hessienne sont donnés par :

$$(\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta}))_{l,k} = \frac{T}{\sigma_n^2}\Re\left[\text{Tr}\left(\mathbf{U}\partial_k\tilde{\mathbf{A}}^H\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}}\partial_l\tilde{\mathbf{A}}\right)\right], \tag{5.8.45}$$

avec

$$\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma_n^2(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}})^{-1} - (\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\right)\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}}\left(\sigma_n^2(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}})^{-1} - (\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\right).$$

En utilisant l'identité suivante :

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}} + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H = \tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}^{-1}_{\tilde{y}}.$$

La matrice $\mathbf{U}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}^{-1}_{\tilde{y}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}.$$

En exploitant encore la structure de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}' \\ \mathbf{G}'^* & \mathbf{G}^* \end{bmatrix}$, la matrice $\mathbf{U}$ est aussi structurée sous la forme $\begin{bmatrix} (\diamond) & (\times) \\ (\times)^* & (\diamond)^* \end{bmatrix}$ dont le premier bloc est donné par :

$$\begin{aligned}(\mathbf{U})_{(1:K,1:K)} &= \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{R}_x+, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T\mathbf{G}'^*\mathbf{A}\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{G}'\mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* + \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T\mathbf{G}^*\mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \\ &= [\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En exploitant encore la structure de $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{U}$ dans (5.8.45), nous obtenons :

$$\mathbf{F}''(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2T}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D} \odot \left([\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}\right)^T\right].$$

Annexe 2 : La preuve directe de (5.6.17)

Nous adoptons les mêmes étapes de la dérivation directe de la CRB complexe circulaire présentée dans [106] où l'égalité [106, rel. (15)] est remplacée par :

$$\mathbf{R}_x = [\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{c}_K^H \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}'_x = [\mathbf{c}'_1, \ldots, \mathbf{c}'_K] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1'^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}_K'^T \end{bmatrix},$$

et les relations [106, rels. (16),(17),(18)] deviennent respectivement :

$$\frac{d\mathbf{R}_{\tilde{y}}}{d\theta_k} = \mathbf{D}_k\mathbf{C}_k^H\tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_k\mathbf{D}_k^H, \tag{5.8.46}$$

avec

$$\mathbf{D}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_k^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_k & \mathbf{c}'_k \\ \mathbf{c}'^*_k & \mathbf{c}^*_k \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_k\mathbf{D}_k^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}. \tag{5.8.47}$$

Par conséquent, l'égalité [106, rel. (30)] devient :

$$(\mathbf{I}_F)_{k,l} = T\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{C}_k\mathbf{D}_k^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\mathbf{D}_l\mathbf{C}_l^H\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\right)\right].$$

Grâce à $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2} = \frac{1}{\sigma_n^2}\boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{A}}} = \frac{1}{\sigma_n^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}^*} \end{pmatrix}$, l'égalité [106, rel. (32)] peut être remplacée par :

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_F)_{k,l} &= \frac{T}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{d}_k^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\mathbf{A}^*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{d}_l & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{d}_l^* \end{pmatrix}\right)\right. \\ &\qquad \left.\left(\begin{pmatrix} \mathbf{c}_l^H & \mathbf{c}_l'^T \\ \mathbf{c}_l'^H & \mathbf{c}_l^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{c}_k & \mathbf{c}'_k \\ \mathbf{c}'^*_k & \mathbf{c}^*_k \end{pmatrix}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.8.48}$$

et en exploitant la structure de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}$, l'égalité (5.6.17) est déduite après quelques manipulations algébriques.

Annexe 3 : Preuve de la décroissance monotone de $\mathrm{CRB}(\theta_1)$ en ρ_1

Dans le cas particulier d'une seule source complexe non circulaire, nous avons

$$\mathbf{R}_y = \sigma_{x_1}^2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \;\text{ et }\; \mathbf{R}_y^{'} = \sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{i\phi_1} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T.$$

Puisque $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}^{'} \\ \mathbf{G}^{'*} & \mathbf{G}^{*} \end{bmatrix}$ avec $\mathbf{G} = \left(\mathbf{R}_y - \mathbf{R}_y^{'} \mathbf{R}_y^{*-1} \mathbf{R}_y^{'*}\right)^{-1}$ et $\mathbf{G}^{'} = -\mathbf{G}\mathbf{R}_y^{'} \mathbf{R}_y^{*-1}$. En appliquant le lemme d'inversion matricielle, on obtient

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{I} - \frac{\beta}{\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \beta \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1)} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H$$

et

$$\mathbf{G}' = -\frac{\sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{i\phi_1}}{(\sigma_n^2 + \sigma_{x_1}^2(1-\rho_1^2)\|\mathbf{a}_1\|^2)(\sigma_n^2 + \sigma_{x_1}^2(1+\rho_1^2)\|\mathbf{a}_1\|^2)} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T,$$

avec $\beta = \frac{\sigma_{x_1}^2(\sigma_n^2 + \sigma_{x_1}^2(1-\rho^2)\|\mathbf{a}_1\|^2)}{\sigma_n^2 + \sigma_{x_1}^2 \|\mathbf{a}_1\|^2}$. En exploitant la structure de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, l'expression (5.6.17) peut s'écrire après des manipulations algébriques simples comme

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{\sigma_n^2}{2T} \left\{ \Re \left[(\mathbf{D}^H \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{D}) \odot (\mathbf{U})^T \right] \right\}^{-1},$$

avec

$$\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H \mathbf{G} \mathbf{A} \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x^{'} \mathbf{A}^T \mathbf{G}^{'*} \mathbf{A} \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H \mathbf{G}^{'} \mathbf{A}^* \mathbf{R}_x^{'*} + \mathbf{R}_x^{'} \mathbf{A}^T \mathbf{G}^* \mathbf{A}^* \mathbf{R}_x^{'*}.$$

En substituant dans $\mathbf{U}$ les expressions de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{'}$, $\mathbf{R}_x = \sigma_{x_1}^2$, et $\mathbf{R}_x^{'} = \sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{i\phi_1}$ et après quelques manipulations algébriques l'équation (5.6.22) a lieu.
Notons que l'expression (5.6.22) peut s'écrire en fonction de $x \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{a}_1\|^2 r_1$ comme

$$\mathrm{CRB}_{\theta_1}^{\mathrm{NCG}} = \frac{\|\mathbf{a}_1\|^2}{T\alpha_1 c}\left(-1 + \frac{a+b}{b+\rho_1^2}\right) \quad \text{avec} \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1+x)^2}{x^2}, \;\; b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+x}{1-x} \;\text{ et }\; c \stackrel{\text{def}}{=} 1-x,$$

et comme $\frac{a+b}{c} = \frac{(1+x)}{x^2(1-x)^2} > 0 \;\; \forall x > 0$, ceci implique que C_{θ_1} est une fonction décroissante de ρ_1.

Annexe 4 : Preuve de l'égalité (5.6.23)

L'inégalité supérieure donnée par l'équation (5.6.23) est équivalente à

$$\Re \left[\mathbf{D}^H \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{D} \odot \left([\mathbf{R}_x \mathbf{A}^H, \mathbf{R}_x^{'} \mathbf{A}^T] \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^* \mathbf{R}_x^{'*} \end{bmatrix} - \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_x \right)^T \right] \geq 0.$$

En posant $\mathbf{B}_1 \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix}$ et $\mathbf{B}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{B}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}$, nous avons $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \geq \mathbf{O}$, en vertu le lemme [107, A.4]. Puisque $\mathbf{B}_3 \geq \mathbf{O}$ alors $\mathbf{B}_3 \odot \left(\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2^T\right) \geq \mathbf{O}$, grâce à des propriétés algébriques du produit de Hadamard (voir par exemple, [103, Appendix A, résultat R.19]). De plus, $\Re\left(\mathbf{B}_3 \odot \left(\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2^T\right)\right) \geq \mathbf{O}$ (en utilisant pour toute matrice $\mathbf{H}$ hermitienne, $\Re(\mathbf{H}) \geq \mathbf{O}$ si $\mathbf{H} \geq \mathbf{O}$), ce qui prouve la seconde partie de (5.6.23).

Pour démontrer l'inégalité inférieure de (5.6.23). Nous utilisons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}} &= \mathbf{R}_{\tilde{x}} - \mathbf{R}_{\tilde{x}}\left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}^H(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma_n^2\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right) \\ &= \mathbf{R}_{\tilde{x}} - \left(\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} + \sigma_n^{-2}\tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1},\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est définie positive. Donc, la matrice $\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{x}} - \tilde{\mathbf{A}}^H\tilde{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ définie à partir des matrices structurées est aussi définie positive. On en déduit que le premier bloc $(1:M, 1:M)$ de $\mathbf{W}$ donné par $\mathbf{R}_x - [\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix} = \mathbf{R}_x - \mathbf{B}_1$ est définie positif. Par conséquent, $\mathbf{B}_3 \odot \left(\mathbf{R}_{\tilde{x}}^T - \mathbf{B}_1^T\right) \geq \mathbf{O}$. Ce qui démontre la première partie de (5.6.23).

Annexe 5 : Preuve du Résultat 5.6

La minimisation de la fonction log-vraisemblance (5.7.24) sans tenir compte de la structure de la matrice de covariance hermitienne $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est un problème standard d'optimisation. Une condition nécessaire pour un extremum de (5.7.24) par rapport $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est que les dérivées partielles de (5.7.24) par rapport aux $(\mathbf{R}_{\tilde{x}})_{i,j}$ doivent être égales zéro pour $i, j = 1 \ldots 2K$. Jaffer [44] montre que cette condition est équivalente à l'égalité [44, rel. (4)] qui reste valable ici, en remplaçant $\mathbf{R}_y$ par $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, qui s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\left(\mathbf{R}_{\tilde{y},T} - \mathbf{R}_{\tilde{y}}\right)\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}. \tag{5.8.49}$$

Pour déterminer une expression de $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\text{MV}}$, nous avons besoin d'une expression de l'inverse de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$. En définissant

$$\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H + \mathbf{I} \text{ avec } \bar{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}\breve{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{A}}^*\end{bmatrix}, \tag{5.8.50}$$

où $\breve{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{A}$. En vertu du lemme d'inversion matricielle (cf. par exemple, [107, lemma A.3]), nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}\left(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H \text{ et } \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\bar{\mathbf{A}}\left(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2},$$

et après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\bar{\mathbf{A}}\left(\mathbf{I} + \mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}.$$

En utilisant cette relation, la condition (5.8.49) devient

$$\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \left(\mathbf{R}_{\tilde{y},T} - \mathbf{R}_{\tilde{y}}\right) \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{O}. \tag{5.8.51}$$

En substituant l'expression de $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ dans (5.8.51) on obtient :

$$\bar{\mathbf{A}}^H \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \mathbf{R}_{\tilde{y},T} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}} \mathbf{R}_{\tilde{x}} \bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}.$$

Par conséquent, une estimée du MV de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est donnée par :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}} = [\bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}]^{-1} [\bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}] [\bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}]^{-1}, \tag{5.8.52}$$

avec

$$\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \mathbf{R}_{\tilde{y},T} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}.$$

Puisque $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T}$ et $[\bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}]^{-1}$ sont partitionnées comme

$$\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y},T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{y,T} & \bar{\mathbf{R}}'_{y,T} \\ \bar{\mathbf{R}}'^{*}_{y,T} & \bar{\mathbf{R}}^{*}_{y,T} \end{bmatrix}, \ [\bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{A}}]^{-1} = \begin{bmatrix} [\breve{\mathbf{A}}^H \breve{\mathbf{A}}]^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & [\breve{\mathbf{A}}^T \breve{\mathbf{A}}^*]^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5.8.53}$$

avec $\bar{\mathbf{R}}_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2} \mathbf{R}_{y,T} \mathbf{Q}_n^{-1/2}$ et $\bar{\mathbf{R}}'_{y,T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2} \mathbf{R}'_{y,T} \mathbf{Q}_n^{-1/2}$. Par conséquent, l'estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}$ du MV obtenue sans contrainte de $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ (5.3.7) est également partitionnée. En remplaçant les matrices données par l'égalité (5.8.53) dans $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}$, nous obtenons les expressions (5.7.26) et (5.7.27). De plus, en remplaçant la matrice estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x},\mathrm{MV}}$ dans (5.7.24), les estimées de $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MV}}$ et $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{MV}}$ sont obtenues en maximisant (5.7.25). Par conséquent, les estimées du MV sous contrainte ou sans contrainte sur $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ de $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma})$ coïncident.

Annexe 6 : Preuve du Résultat 5.7

En remplaçant $\mathbf{R}_y$ par $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, les étapes de la dérivation directe de la CRB complexe circulaire présentée dans [32] peuvent être étendues. Après avoir remplacé l'égalité [32, rel. (19)] par :

$$\mathbf{R}_x = [\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{c}_K^H \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}'_x = [\mathbf{c}'_1, \ldots, \mathbf{c}'_K] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}'^T_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}'^T_K \end{bmatrix},$$

les relations [32, rels. (20),(22)] deviennent respectivement

$$\frac{d\mathbf{R}_{\tilde{y}}}{d\theta_k} = \mathbf{D}_k \mathbf{C}_k^H \tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k^H \ \text{ avec } \ \mathbf{D}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_k^* \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \mathbf{C}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_k & \mathbf{c}'_k \\ \mathbf{c}'^*_k & \mathbf{c}^*_k \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k^H \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}.$$

Par conséquent, les relations [32, rels. (17), (31), (39), (40)] deviennent

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{T} \left(\mathbf{F} - \mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}} \mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}\,-1} \mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}\,T}\right)^{-1}, \tag{5.8.54}$$

avec

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{F})_{k,l} &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left[(\bar{\mathbf{D}}_k^H \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \bar{\mathbf{D}}_l)(\mathbf{C}_l^H \bar{\mathbf{A}}^H \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_k)\right]\right\} && (5.8.55)\\
(\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}})_{k,l} &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\bar{\mathbf{D}}_k^H \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \breve{\mathbf{Q}}_n^l \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{C}_k\right)\right\} && (5.8.56)\\
(\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}})_{k,l} &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\breve{\mathbf{Q}}_n^k \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \breve{\mathbf{Q}}_n^l \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\right)\right\} - \mathrm{Tr}\left(\breve{\mathbf{Q}}_n^k \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} \breve{\mathbf{Q}}_n^l \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\right), && (5.8.57)
\end{aligned}
$$

avec $\breve{\mathbf{Q}}_n^k \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^k \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_n^k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \bar{\mathbf{Q}}_n^{k*} \end{bmatrix}$, $\bar{\mathbf{D}}_k \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{d}}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \breve{\mathbf{d}}_k^* \end{pmatrix}$ et $\bar{\mathbf{A}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{A}}^* \end{bmatrix}$ où $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^k \overset{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{Q}_{\tilde{n}}}{d\sigma_k}$, $\breve{\mathbf{d}}_k \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2} \mathbf{d}_k$. En exploitant la structure similaire de $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}' \\ \mathbf{G}'^* & \mathbf{G}^* \end{bmatrix}$ et $\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{F})_{k,l} = 2\Re\Bigg[&\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{d}}_k^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \breve{\mathbf{d}}_k^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}^*}^{\perp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{d}}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \breve{\mathbf{d}}_l^* \end{pmatrix}\right)\\
&\left(\begin{pmatrix} \mathbf{c}_l^H & \mathbf{c}_l'^T \\ \mathbf{c}_l'^H & \mathbf{c}_l^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{A}}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{A}}^T \end{pmatrix}\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{A}}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{c}_k & \mathbf{c}_k' \\ \mathbf{c}_k'^* & \mathbf{c}_k^* \end{pmatrix}\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Nous obtenons après quelques manipulations algébriques :

$$
\mathbf{F} = 4\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H \mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp} \breve{\mathbf{D}}\right) \odot \left([\mathbf{R}_x \breve{\mathbf{A}}^H, \mathbf{R}_x' \breve{\mathbf{A}}^T] \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x \\ \breve{\mathbf{A}}^* \mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}\right)^T\right]. \tag{5.8.58}
$$

En exploitant encore la structure des matrices $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}' \\ \mathbf{G}'^* & \mathbf{G}^* \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}$ et $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^k$ dans les expressions des matrices $\mathbf{M}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}$ (5.8.56) et $\mathbf{T}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}$ (5.8.57), nous obtenons après simplifications les relations (5.7.30) et (5.7.31) qui remplaçant respectivement les relations [32, rels. (43), (44)].

Remarque :

Nous notons que les expressions (5.8.55) et (5.8.56) et (5.8.57) restent valables quelque soit la paramétrisation du modèle de bruit et des vecteurs directionnels des sources. En conséquence, les formules de ce résultat peuvent être étendues au cas de paramètre de DOA multidimensionnel.

Annexe 7 : Preuve du Résultat 5.8

Nous appliquons les étapes de la dérivation de la CRB complexe circulaire sous le modèle de bruit blanc non uniforme présentées dans [32, Sec. 5.1], en substituant dans (5.8.56) et (5.8.57), les expressions suivantes :

$$
\breve{\mathbf{Q}}_n^k = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T \end{pmatrix}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}, \mathbf{C}_k = \mathbf{R}_{\tilde{x}}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{D}}_k = \begin{pmatrix} \breve{\mathbf{D}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{D}}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_k \end{pmatrix},
$$

les relations [32, rels.(54), (56)] et [32, rel. (55)] peuvent être remplacées respectivement par :

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{M})_{k,l} &= 2\Re\Bigg[\mathrm{Tr}\Bigg(\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k^T\breve{\mathbf{D}}^H & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{e}_k^T\breve{\mathbf{D}}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}^*}^{\perp} \end{pmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-1/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_n^{-T/2}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-T/2} \end{pmatrix}\Bigg) \\
&\qquad \Bigg(\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{G}' \\ \mathbf{G}'^* & \mathbf{G}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \breve{\mathbf{A}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \breve{\mathbf{A}}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{R}_x' \\ \mathbf{R}_x'^* & \mathbf{R}_x^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_k \end{pmatrix}\Bigg)\Bigg] \\
&= 4\Re\Big[\mathrm{Tr}\Big(\mathbf{e}_k^T\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x\mathbf{e}_k \\
&\qquad + \mathbf{e}_k^T\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}'\breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_x^*\mathbf{e}_k\Big)\Big] \\
\mathbf{M} &= 4\Re\Big[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}) \odot (\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T + (\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}) \odot (\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}'\breve{\mathbf{A}}^*\mathbf{R}_x'^*)^T\Big],
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T})_{k,l} &= 4\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\right)\right] \\
&\quad - 2\left(\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\right) \\
\mathbf{T} &= 4\Re\left[(\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}) \odot (\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{G}\mathbf{Q}_n^{-1/2})^T\right] \\
&\quad - 2\left((\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2}) \odot (\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{Q}_n^{-1/2})^T\right).
\end{aligned}
$$

Nous adoptons les dernières étapes de [32, Sec. 5.1] et en écrivant [32, rel. (59)] comme $\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}} = \mathbf{M}\mathbf{Q}_n^{-1}$ et $\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}} = \mathbf{Q}_n^{-1}\mathbf{T}\mathbf{Q}_n^{-1}$, le résultat 5.8 est prouvé.

Annexe 8 : Preuve des relations (5.7.37), (5.7.38) et (5.7.39)

Notons que la matrice $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}$ définie par le résultat 5.6, peut s'écrire comme

$$
\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}} = \mathbf{P}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})^H + \mathbf{Q}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})\mathbf{Q}_{\tilde{n}},
$$

où

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} \\
\mathbf{Q}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{I} - \mathbf{P}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}),
\end{aligned}
$$

et les dérivées partielles de $\mathbf{P}_u(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma})$ par rapport à θ_k et σ_k sont données par :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{P}_u}{\partial\theta_k} &= \tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}, \\
\frac{\partial\mathbf{Q}_u}{\partial\theta_k} &= -\frac{\partial\mathbf{P}_u}{\partial\theta_k}, \\
\frac{\partial\mathbf{P}_u}{\partial\sigma_k} &= \mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_u, \\
\frac{\partial\mathbf{Q}_u}{\partial\sigma_k} &= -\frac{\partial\mathbf{P}_u}{\partial\sigma_k},
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{\mathbf{E}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial \theta_k}\right)\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)\tilde{\mathbf{A}}^H$ et $\boldsymbol{\Delta}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}}{\partial \sigma_k}$. D'où les dérivées partielles de $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}$ par rapport à θ_k et σ_k sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial \mathbf{P}_u}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\frac{\partial \mathbf{P}_u^H}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \mathbf{Q}_u}{\partial \theta_k}\mathbf{Q}_{\tilde{n}} \\
&= \tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u + \mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u^H + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{Q}_u^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}}_k \\
&+ \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_u^H - \mathbf{E}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u\mathbf{E}_k \\
\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \sigma_k} &= \frac{\partial \mathbf{P}_u}{\partial \sigma_k}\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\frac{\partial \mathbf{P}_u^H}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial \mathbf{Q}_u}{\partial \sigma_k}\mathbf{Q}_{\tilde{n}} + \mathbf{Q}_u \\
&= \mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{P}_u^H + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y},T}\mathbf{Q}_u^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{P}_u^H - \mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que ces dérivées dépendent de la statistique $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ qui tend vers $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ quand T tend vers ∞. En utilisant $\mathbf{Q}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H = \mathbf{O}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty}\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k} &= \mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{z}}\mathbf{P}_u^H + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_u^H - \mathbf{E}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u\mathbf{E}_k \\
\lim_{T\to+\infty}\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \sigma_k} &= \mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H + \mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_u^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{P}_u^H - \mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}} \\
&= -\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}.
\end{aligned}$$

Pour calculer les blocs $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}}$ et $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\sigma}}$, nous utilisons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k^H &= \mathbf{O}, \\
\mathbf{Q}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}} &= \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}, \\
\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u &= \mathbf{Q}_u, \\
\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{Q}_u &= \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u, \\
\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} &= \mathbf{Q}_u,
\end{aligned}$$

nous obtenons après simplifications des calculs :

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k} &= \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H + \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_u^H - \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{E}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} \\
&- \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\mathbf{E}_k \qquad (5.8.59) \\
\lim_{T\to+\infty}\frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}}{\partial \sigma_k}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} &= -\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} - \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \\
&= -\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_u - \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\boldsymbol{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}. \qquad (5.8.60)
\end{aligned}$$

En substituant (5.8.59) dans (5.7.36) et après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}})_{k,p} &= \mathrm{Tr}\left(\tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_p(\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H - \mathbf{I})\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} - \mathbf{I})\right) \\
&+ \mathrm{Tr}\left(\tilde{\mathbf{E}}_p^H\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H - \mathbf{I}_{2M})\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} - \mathbf{I})\right). \qquad (5.8.61)
\end{aligned}$$

Puisque

$$(\mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1} - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{E}}_k^H = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial \theta_k}, \qquad (5.8.62)$$

et par conséquent (5.8.61) devient :

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}})_{k,p} &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial\theta_k}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial\theta_p}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right)\right\}\\ &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial\theta_p}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.8.63}$$

En substituant (5.8.60) dans (5.7.36) et après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}})_{k,p} &= \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right)+\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right)\\ &+ \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right), \end{aligned} \tag{5.8.64}$$

puisque $\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_u = \mathbf{O}$, $\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_u$, $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \mathbf{Q}_u$, $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{Q}_u$. En utilisant le fait que $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} = \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_u^H$ et $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_u^H = \mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, l'équation (5.8.64) devient :

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}})_{k,p} = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right)\right\} - \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_k\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right). \tag{5.8.65}$$

En remplaçant $\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp} = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\mathbf{Q}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}$ et $\mathbf{\Delta}_k = -\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}\check{\mathbf{Q}}_n^k\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1/2}$ dans (5.8.65), on obtient :

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}})_{k,p} = 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\check{\mathbf{Q}}_n^k\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^l\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\right)\right\} - \mathrm{Tr}\left(\check{\mathbf{Q}}_n^k\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^l\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\right).$$

En substituant (5.8.60) et (5.8.59) dans (5.7.36) et après simplification, on obtient :

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}})_{k,p} = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_u\tilde{\mathbf{E}}_k(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{y}}\mathbf{P}_u^H)\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right)+\mathrm{Tr}\left(\tilde{\mathbf{E}}_k^H\mathbf{Q}_u^H\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{P}_u\mathbf{R}_{\tilde{y}})\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{-1}\right) \tag{5.8.66}$$

En utilisant l'équation (5.8.62) et $\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}^{-1}\mathbf{P}_u\mathbf{Q}_{\tilde{n}} = \tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}^{-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, l'équation (5.8.66) devient :

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}})_{k,p} &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{\Delta}_p\mathbf{Q}_u\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial\theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\right)\right\}\\ &= 2\Re\left\{\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}^H}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{A}}}^{\perp}\check{\mathbf{Q}}_n^p\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.8.67}$$

Notons que si chaque colonne de $\mathbf{A}$ est paramétrée par un paramètre scalaire θ_k alors $\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}}{\partial\theta_k} = \bar{\mathbf{D}}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\end{pmatrix}$. En exploitant la structure des matrices $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}$ et $\bar{\mathbf{A}}$, et en suivant le même calcul donné dans l'annexe 6 et 7, nous trouvons les expressions $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}$, $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}$ et $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}$.

Annexe 9 : Preuve du Résultat 5.9

D'après l'égalité (5.8.54), nous avons

$$\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\right)^{-1} = \frac{T}{2}\left(\mathbf{F}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} - \mathbf{M}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\mathbf{T}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}^{-1}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\mathbf{M}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}^T}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\right).$$

Puisque $\mathbf{F}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} = \left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}\right)^{-1}$, nous obtenons :

$$\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\right)^{-1} - \left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}\right)^{-1} = -\frac{T}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\mathbf{T}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}^{-1}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}\mathbf{M}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}^T}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}.$$

Par conséquent, pour démontrer les deux inégalités données par le résultat 5.9, il suffit de démontrer que la matrice $\mathbf{T}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}^{-1}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}$ est définie positive. En effet, puisque la matrice partitionnée $\mathbf{CRB}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{2}{T}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta\theta}} & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}} \\ \mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}}^T & \mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}} \end{pmatrix}^{-1}$ est définie positive, la matrice $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma\sigma}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}} = \mathbf{T}_{\mathrm{Q_n}}^{\mathrm{NCG}}|_{\mathbf{Q}_n=\sigma_n^2\mathbf{I}}$ (d'après annexe 8) est définie positive.

Annexe 10 : Preuve du Résultat 5.10

Considérons l'estimateur du MV.CG du paramètre de DOA sous l'hypothèse d'une distribution complexe circulaire et d'un bruit arbitraire de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n$. Cet estimateur MV.CG est un algorithme du second ordre basé sur $\mathbf{R}_{y,T}$. Grâce à l'efficacité asymptotique de l'estimateur MV, sa matrice de covariance asymptotique $\mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.CG}}(\boldsymbol{\theta})$ satisfait :

$$\mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Or nous savons d'après le résultat 4.6 que les performances asymptotiques de tout algorithme du second ordre basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ qui n'utilise pas l'hypothèse éventuelle de non corrélation spatiale des sources sont identiques à celles du cas d'observations gaussiennes complexes circulaires. En conséquence, si l'estimateur MV.CG est utilisé sous l'hypothèse gaussien non circulaire avec les mêmes matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{Q}_n$, la matrice de covariance asymptotique $\mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ de la DOA estimée satisfait :

$$\mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.CG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Cet estimateur MV.CG utilisé sous l'hypothèse gaussien non circulaire satisfait l'inégalité de Cramer Rao :

$$\mathbf{Cov}_{Q_n}^{\mathrm{MV.NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{CRB}_{Q_n}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}).$$

Par suite le résultat 5.10 est démontré.

Annexe 11 : Preuve du Résultat 5.11

En utilisant l'identité

$$(\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}} + \mathbf{I})^{-1}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}},$$

nous obtenons la matrice structurée par bloc

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}} - \mathbf{R}_{\tilde{x}}\bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}} = \left(\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} + \bar{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}, \tag{5.8.68}$$

définie positive, donc le bloc $K \times K$ supérieur droit

$$\mathbf{R}_x - [\mathbf{R}_x \breve{\mathbf{A}}^H, \mathbf{R}_x' \breve{\mathbf{A}}^T] \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} \mathbf{R}_x \\ \breve{\mathbf{A}}^* \mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix},$$

est défini positif. Grâce à (5.6.19) et (5.8.58) nous déduisons :

$$\mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) \leq \frac{2}{T} \mathbf{F}^{-1}. \tag{5.8.69}$$

Puisque $\mathbf{T}^{-1}$ est définie positive alors

$$\frac{2}{T} \mathbf{F}^{-1} \leq \mathbf{CRB}_{\mathrm{AU}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{T} (\mathbf{F} - \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}^T)^{-1},$$

ce qui prouve le résultat 5.11 en vertu de (5.8.69).

Dans le cas particulier de signaux sources non corrélés de non circularité maximale, $\mathbf{R}_x' = \mathbf{R}_x \boldsymbol{\Phi}$ où $\mathbf{R}_x$ et $\boldsymbol{\Phi}$ sont diagonales avec $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{Diag}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_K})$.

$$[\mathbf{R}_x \breve{\mathbf{A}}^H, \mathbf{R}_x' \breve{\mathbf{A}}^T] \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} \mathbf{R}_x \\ \breve{\mathbf{A}}^* \mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix} = \mathbf{R}_x \left(\breve{\mathbf{A}}^H, \boldsymbol{\Phi} \breve{\mathbf{A}}^T \right) \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} \\ \breve{\mathbf{A}}^* \boldsymbol{\Phi}^* \end{bmatrix} \mathbf{R}_x.$$

En remplaçant dans (5.8.68), les matrices $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ et $\bar{\mathbf{A}}$ par $\mathbf{R}_x$ et $\left(\breve{\mathbf{A}}^H, \boldsymbol{\Phi} \breve{\mathbf{A}}^T \right)$, la matrice

$$\mathbf{R}_x - \mathbf{R}_x \left(\breve{\mathbf{A}}^H, \boldsymbol{\Phi} \breve{\mathbf{A}}^T \right) \bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} \\ \breve{\mathbf{A}}^* \boldsymbol{\Phi}^* \end{bmatrix} \mathbf{R}_x = \left(\mathbf{R}_x^{-1} + \left(\breve{\mathbf{A}}^H, \boldsymbol{\Phi} \breve{\mathbf{A}}^T \right) \left(\breve{\mathbf{A}}^H, \boldsymbol{\Phi} \breve{\mathbf{A}}^T \right)^H \right)^{-1},$$

est définie positive, alors l'identité (5.8.69) reste valable et par conséquent, le résultat 5.11 s'étend à ce cas particulier.

Annexe 12 : Preuve du Résultat 5.12

Puisque $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2 \mathbf{Q}_n'$ et $\mathbf{R}_x = \sigma^2 \mathbf{R}_x''$ avec $\mathbf{Q}_n'$ et $\mathbf{R}_x''$ deux matrices diagonales fixées, la matrice $\bar{\mathbf{R}}_y$ peut s'écrire comme :

$$\bar{\mathbf{R}}_y = \breve{\mathbf{A}} \mathbf{R}_x \breve{\mathbf{A}}^H + \mathbf{I} = c_n^{-1} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{R}_x'' \dot{\mathbf{A}}^H + \mathbf{I},$$

avec $\dot{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n'^{-1/2} \mathbf{A}$ et $c_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}$. Nous obtenons par le lemme d'inversion matricielle que lorsque c_n tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_y^{-1} &= \mathbf{I} - \dot{\mathbf{A}} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}} + c_n \mathbf{R}_x''^{-1}) \dot{\mathbf{A}}^H \\ &= \mathbf{I} - \dot{\mathbf{A}} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \dot{\mathbf{A}}^H + c_n \dot{\mathbf{A}} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{R}_x''^{-1} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \dot{\mathbf{A}}^H + o(c_n) \\ &= \boldsymbol{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp} + c_n \dot{\mathbf{A}} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{R}_x''^{-1} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \dot{\mathbf{A}}^H + o(c_n). \end{aligned}$$

Puisque $\boldsymbol{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp} \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$, alors

$$\bar{\mathbf{R}}_y^{-1} \dot{\mathbf{A}} = c_n \dot{\mathbf{A}} (\dot{\mathbf{A}}^H \dot{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{R}_x''^{-1} + o(c_n),$$

et par conséquent, d'après la définition de $\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}$ donnée par l'identité (5.7.35), nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}} &= 2\Re\left[(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp})\odot(\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x)^T\right]\\ &= 2\Re\left[(\dot{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})\odot(\dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{A}}^H\dot{\mathbf{A}})^{-1})^T\right]+o(c_n),\end{aligned}\tag{5.8.70}$$

avec $\dot{\mathbf{D}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbf{Q}_n'^{-1/2}\mathbf{D}$. De plus

$$\bar{\mathbf{R}}_y^{-T}\odot\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}=(\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}+\mathcal{B}^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}+(\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathcal{B}+o(c_n),$$

avec $\mathcal{B}\stackrel{\mathrm{def}}{=}c_n\dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{A}}^H\dot{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{R}_x''^{-1}(\dot{\mathbf{A}}^H\dot{\mathbf{A}})^{-1}\dot{\mathbf{A}}^H$. Puisque $\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}=\mathbf{O}$, alors

$$\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}=\mathcal{B}+o(c_n),$$

et par conséquent, l'expression de $\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}$ donnée par l'égalité (5.7.35) devient

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}} &= 2\left(\bar{\mathbf{R}}_y^{-T}\odot\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}-(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\mathbf{R}_y^{-1})^T\odot(\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}\mathbf{R}_y^{-1})\right)\\ &= 2\left\{(\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}+\mathcal{B}^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}+(\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathcal{B}\right\}+o(c_n).\end{aligned}$$

Notons que

$$\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x=\sigma_n^{-2}\mathbf{R}_x\dot{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x=\sigma^2\mathbf{R}_x''\mathbf{R}_x''^{-1}\mathbf{R}_x''+o(c_n)=\mathbf{R}_x+o(c_n),$$

puisque $\dot{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\dot{\mathbf{A}}=c_n\mathbf{R}_x''^{-1}$. Par conséquent

$$\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x\right)^T=\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot(\mathbf{R}_x)^T+o(c_n)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}+o(c_n).\tag{5.8.71}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\right)^{-1} &= \frac{1}{2}\Bigg\{\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}-\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathcal{D}\left(I+\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathcal{D}\right)^{-1}\\ &\qquad\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\Bigg\}+o(c_n),\end{aligned}\tag{5.8.72}$$

avec $\mathcal{D}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathcal{B}^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}+(\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathcal{B}$. Par conséquent, nous obtenons à partir des équations (5.8.70), (5.8.71) et (5.8.72)

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1} &= 2T\left\{\Re\left[\left(\breve{\mathbf{D}}^H\mathbf{\Pi}_{\breve{\mathbf{A}}}^{\perp}\breve{\mathbf{D}}\right)\odot\left(\mathbf{R}_x\breve{\mathbf{A}}^H\bar{\mathbf{R}}_y^{-1}\breve{\mathbf{A}}\mathbf{R}_x\right)^T\right]-\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\mathbf{T}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}^{-1}}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}^T}\right\}\\ &= \left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}-T\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}^T}\\ &+ T\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathcal{D}\left(I+\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathcal{D}\right)^{-1}\\ &\qquad\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}^T}+o(c_n).\end{aligned}\tag{5.8.73}$$

Notons que quand c_n tend vers 0, $\mathcal{D}$ tend vers $\mathbf{O}$ puisque $\mathcal{B}$ tend vers $\mathbf{O}$. Et Puisque le terme $\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}\left((\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp})^T\odot\mathbf{\Pi}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\perp}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}^T}$ ne dépend pas de c_n, nous obtenons donc

$$\lim_{c_n\to+\infty}\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\mathbf{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{I}.$$

Remarque :
En remplaçant la matrice $\mathbf{Q}'_n$ par $\mathbf{Q}'_n = \mathbf{I}$, nous obtenons une autre démonstration plus précise que celle de Stoica (cf. [107, R9]) de l'équivalence des trois bornes $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ associée au bruit blanc uniforme.

Annexe 13 : Preuve du Résultat 5.13

Dans le cas d'une seule source, les deux matrices de covariance peuvent être ré-écrite comme

$$\mathbf{R}_y = \sigma_{x_1}^2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H + \mathbf{Q}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_z^{'} = \sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{i\phi_1} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T.$$

Par conséquent, grâce au lemme d'inversion matricielle, nous trouvons

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - \frac{\beta}{1+\beta \breve{\mathbf{a}}_1^H \breve{\mathbf{a}}_1} \breve{\mathbf{a}}_1 \breve{\mathbf{a}}_1^H \quad \text{et} \quad \mathbf{G}' = -\frac{\sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{i\phi_1}}{(1+\sigma_{x_1}^2(1-\rho_1^2)\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2)(1+\sigma_{x_1}^2(1+\rho_1^2)\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2)} \breve{\mathbf{a}}_1 \breve{\mathbf{a}}_1^T,$$

avec $\breve{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{a}_1$ et où $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{x_1}^2(1+\sigma_{x_1}^2(1-\rho_1^2)\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2)}{1+\sigma_{x_1}^2\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2}$ est réel constant. Notons que $\breve{\mathbf{d}}_1 = i\boldsymbol{\Lambda}\breve{\mathbf{a}}_1$ avec $\boldsymbol{\Lambda}$ est une matrice réelle diagonale par conséquent, la matrice $\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}$ (5.7.33) devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}} &= 2\Re\left[(\sigma_{x_1}^2 \mathbf{G}\breve{\mathbf{a}}_1 + \sigma_{x_1}^2 \rho_1 e^{-i\phi_1} \mathbf{G}' \breve{\mathbf{a}}_1^*)^T \odot (\breve{\mathbf{d}}_1^H \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{a}}_1}^{\perp})\right] \\
&= -2\Re\left[\frac{i\sigma_{x_1}^2}{1+\sigma_{x_1}^2(1+\rho_1^2)\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2} \breve{\mathbf{a}}_1^T \odot (\breve{\mathbf{a}}_1^H(\boldsymbol{\Lambda} - \frac{\breve{\mathbf{a}}_1^H \boldsymbol{\Lambda} \breve{\mathbf{a}}_1}{\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathbf{I}))\right] = \mathbf{0}^T,
\end{aligned}$$

puisque $\boldsymbol{\Lambda} - \frac{\breve{\mathbf{a}}_1^H \boldsymbol{\Lambda} \breve{\mathbf{a}}_1}{\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathbf{I}$ est une matrice réelle diagonale par conséquent $\breve{\mathbf{a}}_1^T \odot (\breve{\mathbf{a}}_1^H(\boldsymbol{\Lambda} - \frac{\breve{\mathbf{a}}_1^H \boldsymbol{\Lambda} \breve{\mathbf{a}}_1}{\|\breve{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathbf{I}))$ est un vecteur réel. En exploitant la structure de $\bar{\mathbf{R}}_{\tilde{y}}^{-1}$, nous obtenons à partir de (5.7.32) que

$$\mathbf{C}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{2T\breve{\mathbf{d}}_1^H \boldsymbol{\Pi}_{\breve{\mathbf{a}}_1}^{\perp} \breve{\mathbf{d}}_1} \frac{1}{\sigma_{x_1}^2(\breve{\mathbf{a}}_1^H \mathbf{G}\breve{\mathbf{a}}_1)(1+\rho_1^2) + 2\sigma_{x_1}^2 \rho_1 \Re(e^{-i\phi_1}\breve{\mathbf{a}}_1^H \mathbf{G}' \breve{\mathbf{a}}_1^*)}.$$

Ensuite en remplaçant les expressions de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ par leurs expressions, on trouve (5.7.41).

Chapitre 6

Bornes de Cramer Rao de DOA pour signaux discrets

6.1 Introduction

Dans le chapitre 5, on a démontré des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul associées à des distributions gaussiennes complexes non circulaires sous différents modèles de bruit gaussien complexe circulaire. Ces bornes sont largement inférieures aux CRB conventionnelles gaussiennes complexes circulaires pour des faibles valeurs de séparation angulaire, de séparation de phase de non circularité et de SNR. Cependant, dans le cas des distributions discrètes, il n'existe aucune expression explicite de la CRB du paramètre de DOA seul, bien que les performances des DOA estimées ont été analysées uniquement par simulations dans [54], grâce à des approches itératives EM dans le cas de bruit complexe circulaire gaussien de matrice de covariance arbitraire paramétrée par un vecteur des paramètres identifiables.
Nous notons que indépendamment du problème d'estimation de DOA, des expressions non interprétables de la CRB de l'offset de phase ou de fréquence de signaux de modulations BPSK et QPSK ont été démontrées et analysées dans (par exemple, [19, 88, 100, 111, 62]).

Puisque les distributions associées à des signaux de modulations BPSK, MSK ou QPSK affectés par un bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme sont des mélanges de distributions gaussiennes complexes circulaires, qui n'appartiennent pas ainsi à la famille exponentielle, des formules interprétables de la CRB sont inaccessibles. Cependant, nous allons démontrer que dans le cas particulier d'un échantillonage synchrone au débit symbole pour des vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta)$ de norme constante et de bruit spatialement blanc uniforme ou non, des expressions analytiques interprétables de la CRB peuvent d'être obtenues.

Dans le cas particulier d'une seule source, nous démontrons que les paramètres puissance et phase sont découplés dans les FIM associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK. Par conséquent, des expressions analytiques des CRB stochastiques du paramètre de DOA

seul sont obtenues facilement dans le cas de bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme. Ces bornes sont comparées avec celles obtenues sous différentes connaissances a priori sur les paramètres ou sur la distribution des sources ainsi qu'avec des CRB stochastiques associées à des distributions gaussiennes complexes circulaires et non circulaires et avec la CRB déterministe.

Dans le cas de plusieurs sources indépendantes affectées par un bruit blanc uniforme ou non, les FIM ne peuvent pas se calculer explicitement (sans faire appel à l'opérateur espérance) ainsi que les CRB associées. Malgré cette difficulté, les CRB du paramètre de DOA seul sont analysées grâce à la loi forte des grands nombres pour des valeurs de SNR quelconques. Cependant, des expressions explicites de la CRB du paramètre de DOA seul associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK sont obtenues pour des valeurs de SNR élevées. Nous avons démontré dans ce cas que la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source dans les deux modèles de bruit. Les comparaisons effectuées dans le cas d'une seule source sont étendues au cas particulier de deux sources où nous avons mis en évidence de grandes différences de comportement par rapport à la borne obtenue dans le cas de signaux gaussiens circulaires ou non circulaires, démontrant ainsi l'intérêt des approches EM dans le cas de connaissances a priori sur la distribution discrète des sources. Enfin ces CRB discrètes ou gaussiennes sont utilisées pour définir des seuils statistiques absolus de résolution en présence de deux sources discrètes ou complexes gaussiennes pour des grandes valeurs de SNR. Ces bornes de résolution sont comparées au seuil de résolution associé à l'algorithme MUSIC gaussien complexe circulaire qui est asymptotiquement efficace quand le SNR tend vers l'infini.

6.2 Définitions et formalisation du problème

Nous considérons une antenne arbitraire de M capteurs recevant un ou plusieurs signaux indépendants de modulations BPSK, MSK ou QPSK issus de DOA inconnues $(\theta_k)_{k=1,\dots,K}$. Nous supposons que l'antenne est parfaitement calibrée de telle sorte que les vecteurs directionnels sont des fonctions connues $\mathbf{a}_k$ de θ_k telles que $\|\mathbf{a}_k\|^2 = M$. Nous supposons également qu'il n'y a pas d'interférence entre symboles et que la fréquence d'échantillonnage est égale aux fréquences des symboles qui sont égales, de sorte qu'après démodulation, les signaux en bande de base en sortie de filtrage adapté du réseau d'antenne s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{y}_t = \sum_{k=1}^{K} s_{k,t}\mathbf{a}_k + \mathbf{n}_t \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{6.2.1}$$

où $s_{k,t} = \sigma_{s_k} e^{i\phi_k}\epsilon_{k,t}$ et où $(\epsilon_{k,t})_{t=0,\dots,T-1,k=1,\dots,K}$ sont des symboles aléatoires indépendants, identiquement distribués (IID) prenant des valeurs ± 1 [resp. $\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$] avec des probabilités égales associées à la modulation BPSK [resp. QPSK] et pour la modulation MSK ces symboles sont définis par $\epsilon_{k,t} = i^t b_{k,t}\epsilon_{k,0}$ avec $b_{k,t}$ une suite des symboles BPSK

indépendants, identiquement distribués (IID) prenant des valeurs ± 1 avec des probabilités égales où la valeur initiale $\epsilon_{k,0}$ de module 1 (cf. chapitre 3) reste inconnue dans l'ensemble $\{1, +i, -1, -i\}$. $(\mathbf{n}_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ sont des variables aléatoires IID complexes circulaires centrées gaussiennes modélisant un bruit blanc uniforme ou non uniforme de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n(\sigma_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$ ou $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_M^2)$. $\mathbf{n}_t$ et ϵ_t sont supposés indépendants. En absence de connaissance a priori sur les symboles transmis (leur phase ϕ_k et leur puissance σ_{s_k}), notre modèle (6.2.1) est paramétré par $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1)$ dans le cas d'une seule source ou par $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \ldots, \sigma_{s_K}, \phi_K, \theta_K)$ dans le cas de K sources avec $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \ldots, \sigma_M)$ dans le cas de bruit blanc non uniforme et dans le cas de bruit blanc uniforme $\boldsymbol{\sigma}$ est remplacé par σ_n. Par conséquent, les observations $(\mathbf{y}_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ possèdent une PDF comme mélange de distributions gaussiennes complexes circulaires :

$$p(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{L^K \pi^M \mathrm{Det}(\mathbf{Q}_n)} \sum_{j=1}^{L^K} e^{-(\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_{j,t})^H \mathbf{Q}_n^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{A}\mathbf{s}_{j,t})} \tag{6.2.2}$$

avec $\mathbf{s}_{j,t} = (\sigma_{s_1}\eta_{j,1}e^{i\phi_1}, \ldots, \sigma_{s_K}\eta_{j,K}e^{i\phi_K})^T$ où $(\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,K})_{j=1,L^K} = (\pm 1, \ldots, \pm 1)$ $(L = 2)$, $(\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,K})_{j=1,L^K} = (\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2, \ldots, \pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2)$ $(L = 4)$ ou $\mathbf{s}_{j,t} = (i^t\sigma_{s_1}\eta_{j,1}e^{i\phi_1}\epsilon_{1,0}, \ldots, i^t\sigma_{s_K}\eta_{j,K}e^{i\phi_K}\epsilon_{K,0})^T$, $(\eta_{j,1}, \ldots, \eta_{j,K})_{j=1,L^K} = (\pm 1, \ldots, \pm 1)$ $(L = 2)$ associées respectivement aux modulations BPSK et QPSK ou MSK.

6.3 CRB stochastiques sous bruit blanc uniforme

6.3.1 Cas d'une seule source

Dans ce cas, les PDF données par (6.2.2) associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK peuvent être simplifiées comme :

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{BPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \sigma_n^{2M}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}_t\|^2 + M\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2}} \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_n^2} g_1(\mathbf{y}_t)\right) \\
p_{\mathrm{MSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \sigma_n^{2M}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}_t\|^2 + M\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2}} \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_n^2} g_3(\mathbf{y}_t)\right) \\
p_{\mathrm{QPSK}}(\mathbf{y}_t; \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \sigma_n^{2M}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}_t\|^2 + M\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2}} \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_n^2\sqrt{2}} g_1(\mathbf{y}_t)\right) \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_n^2\sqrt{2}} k_1(\mathbf{y}_t)\right),
\end{aligned}$$

avec $g_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1)$, $g_3(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(i^t s_0 e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1)$ et $k_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1)$. Cependant nous démontrons en annexe 1 le résultat suivant en s'inspirant des résultats obtenus dans [3] sur l'estimation du SNR de signaux de modulations BPPK et QPSK.

Résultat 6.1 *Les paramètres puissance et phase de $\boldsymbol{\alpha}$ sont découplés dans les FIM associées aux signaux de modulations stochastiques BPSK, MSK et QPSK affectés par un bruit blanc uniforme et celles-ci sont données par :*

$$\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}} = \mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_B^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_B^{(2)} \end{bmatrix} \quad et \quad \mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_Q^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_Q^{(2)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_B^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{4M}{\sigma_n^2}(1 - \frac{2\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2} f_1(\rho_{u,1})) & \frac{4M\sigma_{s_1}}{\sigma_n^3} f_1(\rho_{u,1}) \\ \frac{4M\sigma_{s_1}}{\sigma_n^3} f_1(\rho_{u,1}) & \frac{2M}{\sigma_n^2}(1 - f_1(\rho_{u,1})) \end{bmatrix} \\
\mathbf{I}_Q^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{4M}{\sigma_n^2}(1 - \frac{2\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2} f_1(\frac{\rho_{u,1}}{2})) & \frac{4M\sigma_{s_1}}{\sigma_n^3} f_1(\frac{\rho_{u,1}}{2}) \\ \frac{4M\sigma_{s_1}}{\sigma_n^3} f_1(\frac{\rho_{u,1}}{2}) & \frac{2M}{\sigma_n^2}(1 - f_1(\frac{\rho_{u,1}}{2})) \end{bmatrix} \\
\mathbf{I}_B^{(2)} &= \begin{bmatrix} 2\rho_{u,1}(1 - f_2(\rho_{u,1})) & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1)}{M}(1 - f_2(\rho_{u,1})) \\ \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1)}{M}(1 - f_2(\rho_{u,1})) & \frac{2\rho_{u,1}\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}(1 - f_2(\rho_{u,1})) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{I}_Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 2\rho_{u,1}\left(1 - (1+\rho_{u,1}) f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right) & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1)}{M}\left(1 - (1+\rho_{u,1}) f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right) \\ \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1)}{M}\left(1 - (1+\rho_{u,1}) f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right) & \frac{2\rho_{u,1}\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}\left(1 - (1 + \frac{\rho_{u,1}}{M}\frac{|\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}|^2}{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}) f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right) \end{bmatrix}.$$

Avec $\rho_{u,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2}$ *et* $\mathbf{a}_1^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1}$ *et où* f_1 *et* f_2 *sont deux fonctions décroissantes de* $\rho_{u,1}$ *définies par :*

$$f_1(\rho_{u,1}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\rho_{u,1}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}}{\cosh(u\sqrt{2\rho_{u,1}})} du \quad et \quad f_2(\rho_{u,1}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\rho_{u,1}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\cosh(u\sqrt{2\rho_{u,1}})} du. \tag{6.3.3}$$

Notons que les blocs $\mathbf{I}_B^{(1)}$ et $\mathbf{I}_Q^{(1)}$ associés au paramètre puissance sont similaires à ceux dérivés dans [3]. Puisque ces FIM sont diagonales par blocs, des expressions explicites des CRB du paramètre de DOA seul peuvent être déduites facilement comme :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right)\left(\frac{1}{1 - f_2(\rho_{u,1})}\right), \tag{6.3.4}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right)\left(\frac{1}{1 - f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})}\right) \tag{6.3.5}$$

où γ_1 est un facteur purement géométrique $2M^{-1}\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^{\perp}\mathbf{a}_1^{'}$ avec $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{a}_1}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1)^{-1}\mathbf{a}_1^H$. Puisque f_2 est une fonction décroissante, nous avons

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1).$$

Notons que quand $\rho_{u,1}$ tend vers ∞, f_2 converge vers 0, et par conséquent ces deux bornes coïncident.

Comparaisons des CRB

Selon différentes connaissances a priori sur les paramètres ou sur la distribution des sources, plusieurs CRB peuvent être considérées et comparées aux expressions (6.3.4) et (6.3.5).

CRB stochastique pour des signaux complexes gaussiens

Puisque les modulations BPSK et MSK (après prétraitement de dérotation) [resp. QPSK] sont complexes non circulaires [resp. complexe circulaire] au second ordre, il est intéressant de comparer les CRB stochastiques (6.3.4) et (6.3.5) aux CRB associées à des distributions non circulaires gaussiennes (NCG) de taux de non circularité maximale ou gaussiennes circulaires (CG) qui peuvent être considérées comme des majorants par rapport aux vraies CRB stochastiques (cf. par exemple, [103, p. 293] et [69, corollary 1]). Plus précisément, ces bornes sont données par le chapitre précédent, que nous rappelons ici :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\left[1+\frac{1}{2\rho_{u,1}}\right]\right), \quad \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\left[1+\frac{1}{\rho_{u,1}}\right]\right),$$

nous avons

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} = \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1-f_2(\rho_{u,1}))(1+\frac{1}{2\rho_{u,1}})} \tag{6.3.6}$$

et

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1-f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2}))(1+\frac{1}{\rho_{u,1}})}. \tag{6.3.7}$$

Nous observons sur la figure 6.1 que les CRB associées aux modulations BPSK [resp. QPSK] sont presque identiques aux CRB associées à des distributions gaussiennes complexes non circulaires [resp. circulaires] et égales pour des grandes et des faibles valeurs de $\rho_{u,1}$.

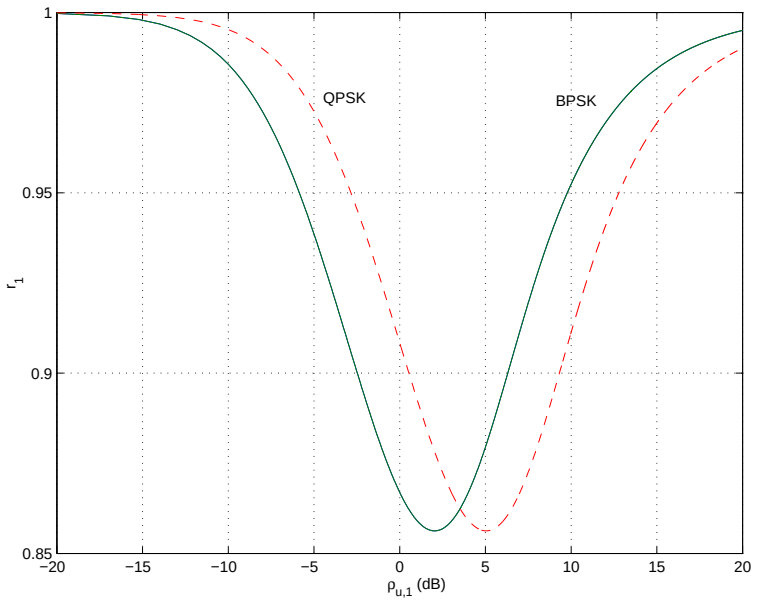

FIG. 6.1 – Rapports $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BP(M)SK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}$ et $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de $\rho_{u,1}$.

Nous notons que ces rapports dépendent seulement de $\rho_{u,1}$ et tendent tous les deux vers 1 quand $\rho_{u,1}$ tend vers ∞. Nous déduisons grâce au développement limité de la fonction *cosh* au voisinage de $\rho_{u,1} = 0$, dont les termes s'expriment en fonction $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2/2} du = \mathrm{E}(X^k)$

où X est une variable aléatoire gaussienne normalisée, le développement limité de la fonction $f_2(\rho_{u,1})$:

$$f_2(\rho_{u,1}) = 1 - 2\rho_{u,1} + 4\rho_{u,1}^2 - \frac{40}{3}\rho_{u,1}^3 + \frac{208}{3}\rho_{u,1}^4 + \rho_{u,1}^4\epsilon(\rho_{u,1}).$$

Nous obtenons après simplification :

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} = 1 - \frac{8}{3}\rho_{u,1}^2 + \rho_{u,1}^2\epsilon(\rho_{u,1}) \tag{6.3.8}$$

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)} = 1 - \frac{2}{3}\rho_{u,1}^2 + \rho_{u,1}^2\epsilon(\rho_{u,1}). \tag{6.3.9}$$

D'où pour $\rho_{u,1} \ll 1$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} < \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)},$$

comme l'illustre la figure 6.2. Nous observons en plus sur cette figure que le domaine d'approximation est différent pour les deux modulations.

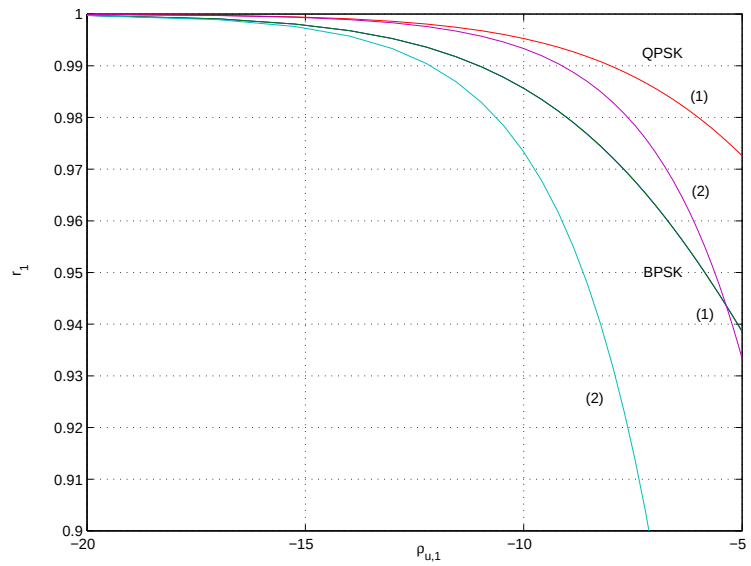

FIG. 6.2 – Rapports $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BP(M)SK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}$ exact (1) donné par (6.3.6) et approximé donné par (6.3.8), $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)}$ exact (1) donné par (6.3.7) et approximé (2) donné par (6.3.9) pour des faibles valeurs de $\rho_{u,1}$.

En absence de décalage de phase ou après correction de celle-ci (i.e., ϕ_1 est connue), les bornes (6.3.4) et (6.3.5) de θ_1 seule deviennent :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{M}{2\|\mathbf{a}_1'\|^2}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right)\left(\frac{1}{1 - f_2(\rho_{u,1})}\right), \tag{6.3.10}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{M}{2\|\mathbf{a}_1'\|^2}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right)\left(\frac{1}{1 - (1 + \rho_{u,1}(1 - \frac{M\gamma_1}{2\|\mathbf{a}_1'\|^2}))f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})}\right). \tag{6.3.11}$$

Nous comparons ces expressions en terme de rapport avec (6.3.4) et (6.3.5), nous obtenons

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)} = \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1)} = \frac{2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M\gamma_1}, \tag{6.3.12}$$

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)} = \left(\frac{2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M\gamma_1}\right)\left(1-\left(1-\frac{M\gamma_1}{2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}\right)\frac{\rho_{u,1}f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})}{1-f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})}\right). \tag{6.3.13}$$

Nous remarquons que le premier rapport (6.3.12) ne dépend pas de $\rho_{u,1}$ et reste toujours inférieur à 1 car $2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2 > M\gamma_1$. Par ailleurs, le second rapport (6.3.13) dépend de $\rho_{u,1}$ et tend vers la constante $\frac{2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M\gamma_1}$ pour des grandes valeurs de SNR (cf. figure 6.3).

CRB supervisée (DA)

Si les symboles transmis sont connus en réception (DA estimation), le signal résultant $\mathbf{y}_t$ est gaussien circulaire de moyenne $\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\epsilon_t\mathbf{a}_1$ et de matrice de covariance $\sigma_n^2\mathbf{I}_M$. Par conséquent, $(\mathbf{y}_0,\ldots,\mathbf{y}_{T-1})^T$ est aussi un vecteur gaussien circulaire de moyenne $\boldsymbol{\epsilon}\otimes\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\mathbf{a}_1$ et de matrice de covariance $\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}$ où $\boldsymbol{\epsilon}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(\epsilon_0,\ldots,\epsilon_{T-1})^T$. En appliquant la formule de Slepian-Bangs (cf., [103, rel. (B.3.25)]), nous obtenons

$$\left(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}\right)_{k,l} = \frac{1}{\sigma_n^4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}}{\partial\alpha_l}\right) + \frac{2}{\sigma_n^2}\sum_{t=1}^{T}|\epsilon_t|^2\Re\left(\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\mathbf{a}_1}{\partial\alpha_l}\right).$$

Cette matrice peut s'écrire sous forme matricielle en notant que $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}|\epsilon_t|^2 = 1$ et $\|\mathbf{a}_1\|^2 = M$ qui implique $\mathbf{a}_1^{H^{'}}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'} = 0$ et par conséquent $\Re(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}) = 0$ et $\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}) = i\mathbf{a}_1^{H^{'}}\mathbf{a}_1$:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}} = T\begin{bmatrix} \frac{4M}{\sigma_n^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M}{\sigma_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho_{u,1} & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1^H)}{M} \\ 0 & 0 & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1^H)}{M} & \frac{2\rho_{u,1}\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M} \end{bmatrix}.$$

Donc

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right). \tag{6.3.14}$$

Nous notons que les éléments des matrices $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BP(M)SK}}$ et $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}$ dépendent de f_1 et f_2 qui tendent tous les deux vers 0 quand $\rho_{u,1}$ tend vers ∞. Par conséquent, ces deux matrices coïncident avec la matrice $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}$ et nous déduisons que pour $\rho_{u,1}$ tendant vers ∞ :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1).$$

Nous observons sur la figure 6.3 que les bornes $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ [resp. $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$] sont dominées par $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ [resp., $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$] sauf pour des faibles valeurs de SNR. Nous observons également qu'il n'y a pas de différence significative entre les CRB non supervisées (si aucune connaissance a priori n'est disponible sur les sources) et supervisées sauf pour des faibles valeurs du SNR.

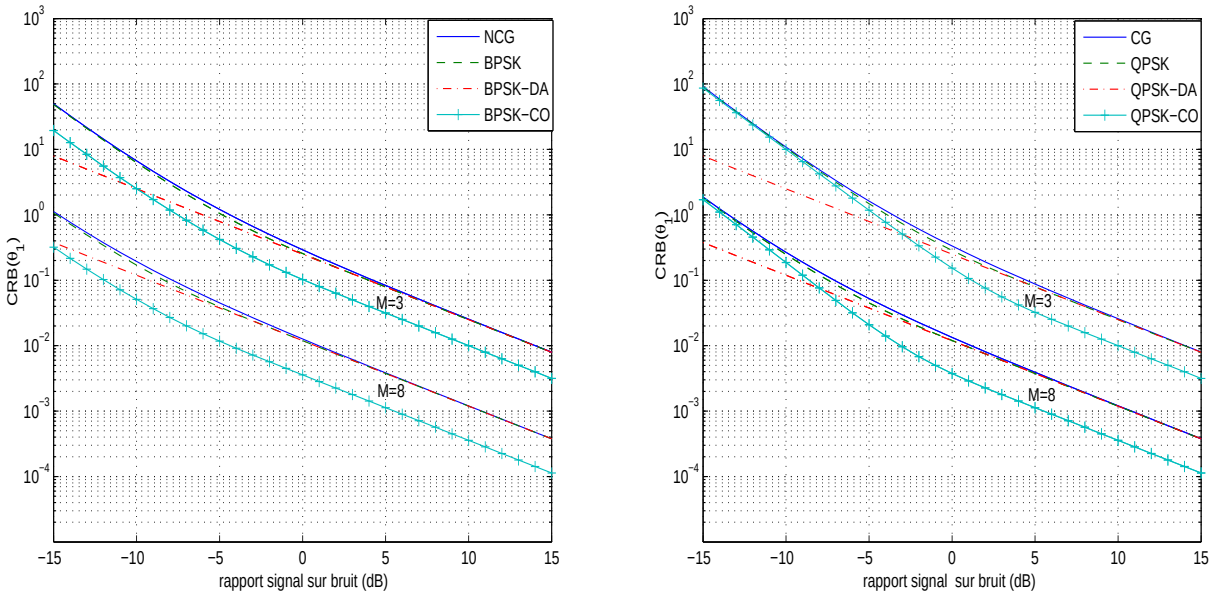

FIG. 6.3 – CRB normalisées ($T = 1$) associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK : $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BP(M)SK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{BP(M)SK}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,CO}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour un réseau linéaire uniforme de M capteurs.

CRB déterministe

Pour des signaux sources déterministes, la CRB de la DOA ne dépend pas de la réalisation de $(\epsilon_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ puisque $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}|\epsilon_t|^2 = 1$, cette borne est donnée par (cf., [107, rel. (2.11)]) :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\rho_{u,1}}\right).$$

Nous remarquons que cette expression reste valable si les deux modulations BPSK et QPSK sont remplacées par des signaux connus de phases modulés dont les modules sont constants [59]. De plus cette borne a été dérivée également dans ([92, rel. (50)]) pour des signaux de modules constants où un sous ensemble des symboles sont connus. Notons que cette expression est identique à l'expression $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}$ obtenue lorsque les symboles sont connus en réception, ceci implique qu'en connaissant le signal ou non, ces bornes sont insensibles aux connaissances a priori.

6.3.2 Cas de plusieurs sources

Due au découplage entre les paramètres dans la FIM, les résultats présentés dans ce paragraphe restent valable quelque soit le nombre de sources. Pour simplifier les notations nous considérons le cas de deux sources indépendantes BPSK, MSK ou QPSK où la PDF de $\mathbf{y}_t$ est respectivement un mélange de 4 PDF gaussiennes circulaires ou 16 PDF gaussiennes circulaires. Les FIM associées aux paramètres $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\sigma_n, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$ ne peuvent pas être calculées explicitement (sans faire appel implicitement à l'opérateur espérance) ainsi que les

CRB associées. Cependant, les CRB du paramètre $\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_1, \theta_2)$ seul associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK sont obtenues d'une manière numérique grâce à la loi forte des grands nombres, i.e.,

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{-1}\right)_{(4:7,4:7)} \tag{6.3.15}$$

où la FIM associée à $(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{T-1})$ est donnée par :

$$(\mathbf{I}_{\mathrm{U}})_{k,l} = \lim_{T' \to \infty} \frac{1}{T'} \sum_{t'=0}^{T'-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_{t+t'T}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_{t+t'T}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_l} \right) \right],$$

où $\left(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{-1}\right)_{(4:7,4:7)}$ est une sous matrice (2×2) dont les éléments sont définis par les intersections des lignes 4 et 7 avec les colonnes 4 et 7 de la matrice $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{-1}$.
Cependant, pour des grandes valeurs de SNR, plus précisément (pour $M\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$ et $M\frac{\sigma_{s_2}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$), nous démontrons en annexe 2 le résultat suivant :

Résultat 6.2 *Les FIM associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK sont approximées par la même expression explicite :*

$$\begin{bmatrix} \frac{4M}{\sigma_n^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M}{\sigma_n^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho_{u,1} & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{\prime H}\mathbf{a}_1)}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\rho_{u,1}(i\mathbf{a}_1^{\prime H}\mathbf{a}_1)}{M} & \frac{2\rho_{u,1}\|\mathbf{a}_1^{\prime}\|^2}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2M}{\sigma_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\rho_{u,2} & \frac{2\rho_{u,2}(i\mathbf{a}_2^{\prime H}\mathbf{a}_2)}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho_{u,2}(i\mathbf{a}_2^{\prime H}\mathbf{a}_2)}{M} & \frac{2\rho_{u,2}\|\mathbf{a}_2^{\prime}\|^2}{M} \end{bmatrix}. \tag{6.3.16}$$

Il est clair qu'à partir de (6.3.16) les paramètres associés aux deux sources sont découplés entre eux ainsi qu'avec la puissance de bruit. Par conséquent, pour deux sources indépendantes, la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source pour des grandes valeurs de SNR et nous obtenons facilement en inversant la matrice (6.3.16) que

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U,HSNR}}^{\mathrm{BPSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathrm{CRB}_{\mathrm{U,HSNR}}^{\mathrm{MSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathrm{CRB}_{\mathrm{U,HSNR}}^{\mathrm{QPSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1(\theta_1)}\frac{1}{\rho_{u,1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2(\theta_2)}\frac{1}{\rho_{u,2}} \end{bmatrix}, \tag{6.3.17}$$

où γ_2 et $\rho_{u,2}$ sont définis comme γ_1 et $\rho_{u,1}$.
Nous observons à partir de (6.3.17) que $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_k)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_k)$ pour chaque DOA sont identiques respectivement aux CRB (6.3.4) et (6.3.5) d'une seule source obtenue dans le cas où $\rho_{u,k} \gg 1$, contrairement à la CRB stochastique gaussienne complexe circulaire ou non circulaire et à la CRB déterministe où la CRB de la DOA d'une source dépend des paramètres des autres sources. Cette propriété est tout à fait curieuse et rappelle le cas d'estimation des paramètres de sinusoïdes [109] où la CRB des fréquences estimées ne dépend pas de la séparation fréquentielle dans le cas de forts SNR. Plus précisément, nous

avons démontré dans le chapitre 5 que pour des sources indépendantes, les bornes $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta})$ sont équivalentes quand les SNR $\rho_{u,k}$ tendent vers l'infini (sous contrainte $\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_{s_2}^2}$ constant) telle que

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} \frac{1}{\nu_1(\theta_1,\theta_2)}\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{s_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nu_2(\theta_1,\theta_2)}\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{s_2}^2} \end{bmatrix}, \tag{6.3.18}$$

avec $\sigma_{s_k}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|s_{k,t}|^2$ et $\nu_k(\theta_1,\theta_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{a}_k'^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{a}'_k,\ k=1,2$, où $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$.

CRB supervisée (DA)

Si les symboles transmis étaient connus en réception (DA estimation), le signal résultant est circulaire gaussien de moyenne $\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\epsilon_{1,t}\mathbf{a}_1 + \sigma_{s_2}e^{i\phi_2}\epsilon_{2,t}\mathbf{a}_2$ et de matrice de covariance $\sigma_n^2\mathbf{I}$. Par conséquent, $(\mathbf{y}_0,\ldots,\mathbf{y}_T)^{T-1}$ est aussi un vecteur gaussien circulaire de moyenne $\boldsymbol{\epsilon}\otimes(\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\mathbf{a}_1 + \sigma_{s_2}e^{i\phi_2}\mathbf{a}_2)$ et de matrice de covariance $\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}$ où $\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\epsilon_0,\ldots,\epsilon_{T-1})^T$. En appliquant la formule de Slepian-Bangs (voir par exemple, [103, rel. (B.3.25)]), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{DA}}\right)_{k,l} &= \frac{1}{\sigma_n^4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\sigma_n^2\mathbf{I}_{MT}}{\partial\alpha_l}\right) + \frac{2}{\sigma_n^2}\sum_{t=1}^{T}|\epsilon_t|^2\Re\left(\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\mathbf{a}_1}{\partial\alpha_l}\right) \\ &+ \frac{2}{\sigma_n^2}\sum_{t=1}^{T}|\epsilon_t|^2\Re\left(\frac{\partial\sigma_{s_2}e^{-i\phi_2}\mathbf{a}_2^H}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\sigma_{s_2}e^{i\phi_2}\mathbf{a}_2}{\partial\alpha_l}\right).\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\epsilon_t|^2 = 1$, $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{t,1}\epsilon_{t,2} = \mathrm{E}(\epsilon_{t,1}\epsilon_{t,2}) = 0$ et $\|\mathbf{a}_1\|^2 = M$ qui implique $\mathbf{a}_1^{H'}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1' = 0$ d'où $\Re(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1') = 0$ et $\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1') = i\mathbf{a}_1^{H'}\mathbf{a}_1$. Par conséquent, après calcul des différentes dérivées partielles, les FIM associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK sont identiques à la FIM (6.3.16) obtenue avec des grandes valeurs de SNR ainsi les bornes associées coïncident avec la CRB donnée par l'identité (6.3.17).

Illustrations numériques

Après avoir présenté ces différentes propriétés des CRB associées à des distributions discrètes, nous proposons maintenant d'examiner la sensibilité de ces bornes discrètes au type de modulation, au nombre de capteurs, au SNR, à la séparation angulaire, à la séparation de phase de non circularité et au nombre d'observations. Nous supposons dans toutes ces figures que deux sources indépendantes de même puissance rayonnent sur un réseau linéaire uniforme équidistant de M capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k},\ldots,e^{i(M-1)\theta_k})^T$.

Pour déterminer le domaine du SNR pour lequel l'approximation analytique (6.3.17) des CRB pour des valeurs du SNR élevées est valide, nous avons recours à des approximations numériques obtenues à partir de la loi forte des grands nombres (6.3.15). Nous observons sur la figure 6.4 que ce domaine de validité de SNR dépend non seulement du type de modulation mais aussi du nombre de capteurs et de la séparation angulaire $\Delta\theta$. D'après cette figure, ce domaine de validité est réduit pour des sources QPSK comparé à des sources BPSK.

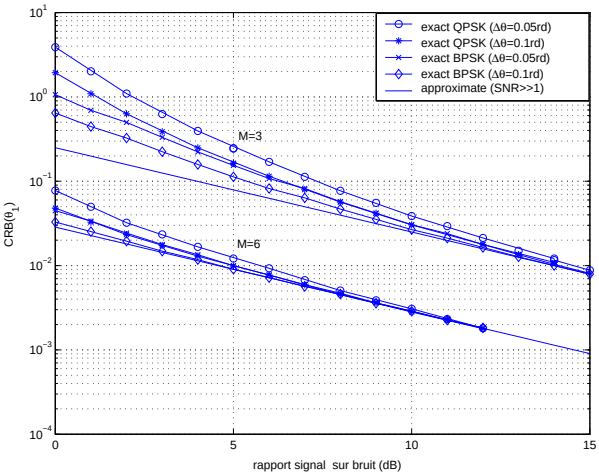

FIG. 6.4 – Valeurs approximées et exactes (avec $T' = 10000$) des $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour deux valeurs de M et de la séparation angulaire $\Delta\theta$ avec $\Delta\phi = 0.1$rd.

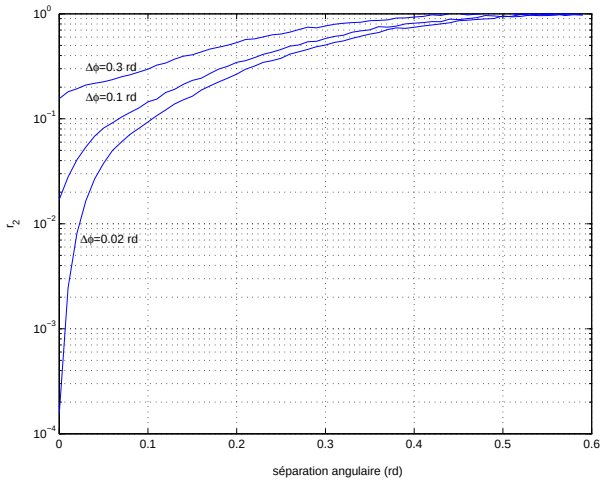

FIG. 6.5 – $r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour plusieurs valeurs d'écart de phase de non circularité $\Delta\phi$ avec $M = 6$ et SNR$= 20dB$.

Par exemple pour $M = 6$, le seuil de validité est à l'ordre de 5dB [resp. 8dB] pour $\Delta\theta = 0.1rd$ et 8dB [resp. 12dB] pour $\Delta\theta = 0.05rd$ pour BPSK [resp. QPSK]. Nous notons que plus la séparation angulaire et M prennent des grandes valeurs, plus le domaine de la validité de l'approximation est grand.

Pour illustrer la différence de comportement entre la CRB sous distribution gaussienne non circulaire et la CRB sous distribution discrète, nous comparons ces deux bornes en terme de rapport dans la figure 6.5 en fonction de la séparation angulaire et de la séparation de phase de non circularité. Nous rappelons tout d'abord que la CRB gaussienne non circulaire (cf. chapitre 5) est obtenue sans aucune connaissance a priori sur les signaux sources et pour que cette comparaison tienne compte de la connaissance a priori des sources indépendantes de même taux de non circularité égal 1 où $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_n, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$, nous choisissons l'expression non explicite de la borne AMV dans le cas gaussien, $\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ donnée par le chapitre 4, qui permet de tenir compte de cette connaissance a priori grâce à la paramétrisation (modèle 1 de paramétrisation défini par la remarque 4.3) des deux matrices de covariance des sources. Nous observons sur la figure 6.5 que la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ est très sensible à la séparation de phase de non circularité sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire. Cette figure montre que contrairement au cas d'une seule source, la CRB sous distribution BPSK est très largement inférieure à la CRB sous distribution gaussienne complexe non circulaire sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire et de séparation de phase de non circularité.

Puisque l'estimateur du MV est asymptotiquement (au sens du nombre d'observations indépendantes) efficace, nous utilisons dans le cas de la distribution BPSK l'algorithme EM

(implémentation itérative de l'estimateur MV) pour illustrer le comportement de la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}$. Sur les figures 6.6 et 6.7 les points de simulations sont obtenus à partir de l'algorithme EM déterministe initialisé par l'algorithme MUSIC non circulaire Alg_1 (cf. chapitre 4). La figure 6.6 compare la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ exacte avec l'erreur quadratique moyenne (EMQ) $\mathrm{E}(\theta_{1,T}-\theta_1)^2$. Nous voyons que contrairement à la CRB $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ et $\mathrm{E}(\theta_{1,T}-\theta_1)^2$ n'augment pas de façon significative quand la séparation angulaire décroît, y compris pour de faible SNR (5dB). La figure 6.7 compare la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ et $\mathrm{E}(\theta_{1,T}-\theta_1)^2$ en fonction du SNR pour $\Delta\theta = 0.3rd$. Nous voyons que les estimées données par l'algorithme EM sont la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ qui est nettement inférieure à $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$. Par suite dans le cas de distribution discrète, l'algorithme MV sous hypothèse discrète a des performances nettement meilleures que l'algorithme MV construit sous hypothèse gaussienne.

Les figures 6.8 et 6.9 montrent le domaine asymptotique en terme de nombre d'observations T et de SNR pour lequel $\mathrm{E}(\theta_{1,T}-\theta_1)^2 \approx \mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$. Sur ces deux figures, les points de simulation sont obtenus à partir de l'algorithme EM déterministe initialisé par des valeurs $\theta_{1,0}$ et $\theta_{2,0}$ aux voisinages des vraies valeurs θ_1 et θ_2. Nous observons que les estimées données par l'estimateur MV sous distribution discrète réalisent la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ dans un très large domaine de SNR et de T (à partir de SNR$= -5dB$ avec $T = 500$ et à partir de $T = 60$ avec SNR$= 10dB$).
De plus, nous voyons sur la figure 6.8 que l'EQM donné par l'algorithmes EM est inférieure à la CRB pour des fiables valeurs de SNR. Cela s'explique par l'initialisation de l'algorithmes EM par des valeurs initiales dans le voisinage de la vraie valeur de DOA ($\Delta\theta = 0.05rd$). Dans ce cas l'algorithme EM converge vers le maximum local de la fonction de vraisemblance situé dans le voisinage de cette condition initiale et non pas vers le maximum de vraisemblance qui lui serait bien sûr très mauvais.

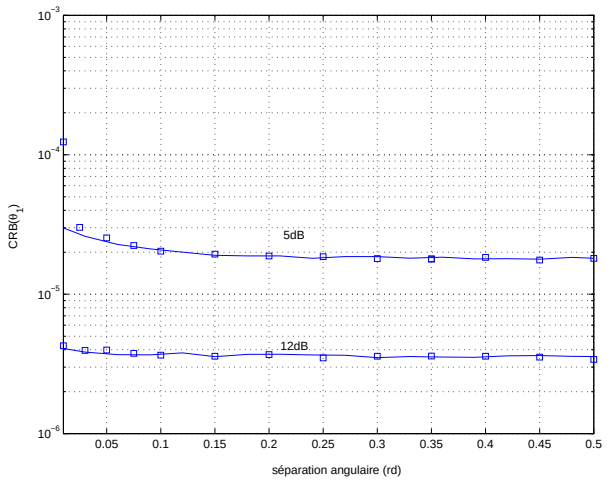

FIG. 6.6 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\mathrm{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$ et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction de la séparation angulaire pour deux valeurs du SNR.

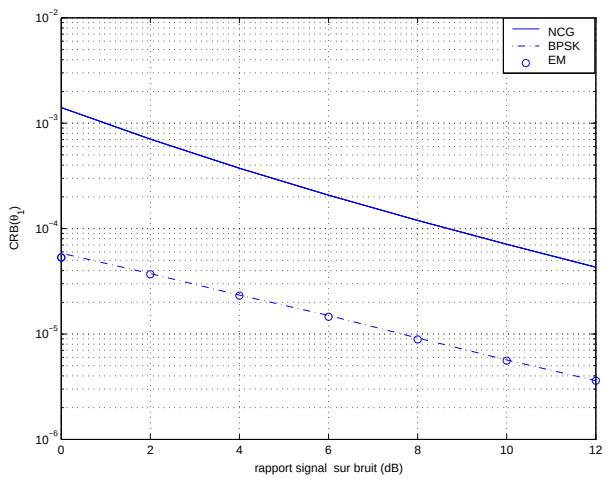

FIG. 6.7 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\mathrm{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (5 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$, $\Delta\theta = 0.3$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR.

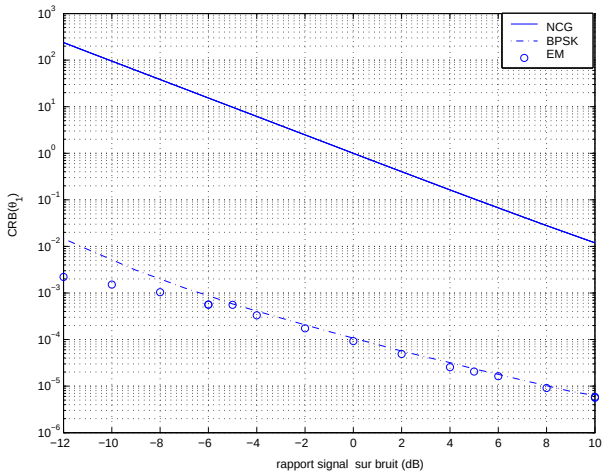

FIG. 6.8 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\mathrm{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $T = 500$, $M = 6$, $\Delta\theta = 0.05$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR.

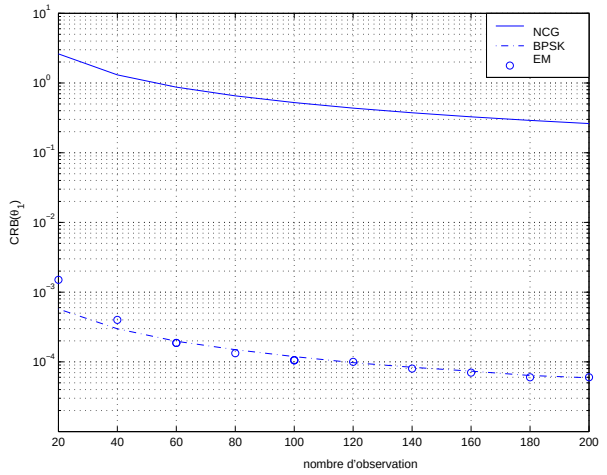

FIG. 6.9 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\mathrm{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations) pour $M = 6$, SNR$= 10dB$, $\Delta\theta = 0.05$rd et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction de T.

6.4 CRB stochastiques sous bruit blanc non uniforme

Dans cette section, nous étendons les résultats obtenus dans le cas de bruit blanc uniforme au cas de bruit blanc non uniforme en utilisant la méthode de blanchiment ($\tilde{\mathbf{y}}_t = \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{y}_t$). Nous notons que le calcul de la FIM dans le cas général de bruit arbitraire inconnu de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$ non diagonale semble difficile car la propriété "$\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|$=constante indépendante de θ_k où $\tilde{\mathbf{a}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{a}_k$" essentielle dans ce calcul n'est plus valable. Dans ce dernier cas de bruit, les performances des estimées de DOA de signaux sources discrets sont seulement analysées par des simulations grâce à des approches itératives EM [54]. Cependant dans le cas de bruit blanc non uniforme, la propriété précédente est vérifiée (puisque $\|\tilde{\mathbf{a}}_k\|^2 = \mathbf{a}_k^H\mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{a}_k = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}$), qui est la clé de la dérivation des CRB dans ce cas de bruit comme nous le verrons dans cette section.

6.4.1 Cas d'une seule source

Dans le cas de bruit blanc non uniforme, le résultat 6.1 peut être étendue au résultat suivant démontré en annexe 4.

Résultat 6.3 *Les paramètres puissance* $(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1})$ *et phase* (ϕ_1, θ_1) *sont découplés dans les FIM associées aux signaux de modulations BPSK, MSK et QPSK et celles-ci sont données par :*

$$\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}} = \mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{MSK}} = T\begin{bmatrix} \mathbf{I}_B^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_B^{(2)} \end{bmatrix} \quad et \quad \mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}} = T\begin{bmatrix} \mathbf{I}_Q^{(1)} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_Q^{(2)} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{I}_B^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2(1-f_2(\rho_{nu,1})) & 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H\tilde{\mathbf{a}}_1)(1-f_2(\rho_{nu,1})) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H\tilde{\mathbf{a}}_1)(1-f_2(\rho_{nu,1})) & 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2(1-f_2(\rho_{nu,1})) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_Q^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2\left(1-(1+\rho_{nu,1})f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})\right) & 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\left(1-(1+\rho_{nu,1})f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})\right) \\ 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1'^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\left(1-(1+\rho_{nu,1})f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})\right) & 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2\left(1-(1+\frac{\rho_{nu,1}}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1'|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2})f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})\right) \end{bmatrix}$$

où $\rho_{nu,1} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = \sigma_{s_1}^2\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}$ *avec* $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{a}_1$. $\mathbf{a}_1' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta_1}$, $\tilde{\mathbf{a}}_1' = \mathbf{Q}^{-1/2}\mathbf{a}_1'$ *et où* f_2 *est la fonction décroissante de* $\rho_{nu,1}$ *définie par l'égalité* (6.3.3).

Grâce au découplage entre les paramètres puissance et phase de $\boldsymbol{\alpha}$ dans les FIM, nous obtenons facilement :

$$\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1) = \text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{MSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{1}{\rho_{nu,1}}\right)\left(\frac{1}{1-f_2(\rho_{nu,1})}\right) \tag{6.4.19}$$

$$\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{1}{\rho_{nu,1}}\right)\left(\frac{1}{1-f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})}\right) \tag{6.4.20}$$

où α_1 est le facteur $2\left(\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2}\right)^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_1'^H\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{a}}_1}^{\perp}\tilde{\mathbf{a}}_1'$.

Puisque la fonction f_2 est une fonction décroissante, nous obtenons aussi

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1),$$

en plus pour $(\sigma_m^2)_{m=1,\ldots,M} = \sigma_n^2$, nous avons $\rho_{nu,1} = \rho_{u,1}$, $\alpha_1 = \gamma_1$ et les CRB données par les identités (6.4.19) et (6.4.20) redonnent respectivement les expressions obtenues dans le cas de bruit blanc uniforme données par les égalités (6.3.4) et (6.3.5). En conséquence, la connaissance a priori d'un bruit blanc uniforme n'améliore donc pas les performances d'estimation de la DOA.

Comparaisons des CRB

Selon différentes connaissances a priori sur les paramètres ou sur la distribution des sources, plusieurs CRB peuvent être considérées et comparées aux expressions (6.4.19) et (6.4.20).

Ainsi en absence de décalage de phase ou après correction de celle-ci (i.e., ϕ_1 est connue), les CRB (6.4.19) et (6.4.20) deviennent

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU,CO}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU,CO}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2}\frac{1}{\rho_{nu,1}}\right)\left(\frac{1}{1-f_2(\rho_{nu,1})}\right) \tag{6.4.21}$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU,CO}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1) = \frac{1}{T}\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2}\frac{1}{\rho_{nu,1}}\right)\left(\frac{1}{1-\left(1+\rho_{nu,1}(1-\frac{\alpha_1\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}{2\|\tilde{\mathbf{a}}_1'\|^2})\right)f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2})}\right). \tag{6.4.22}$$

Nous notons que ces deux expressions (6.4.21) et (6.4.22) sont respectivement similaires à celles données par les égalités (6.3.10) et (6.3.11) dans le cas de bruit blanc uniforme. Par conséquent, les comparaisons effectuées dans le cas de bruit blanc uniforme restent valables.

CRB supervisée (DA)

Si les symboles étaient connues en réception (DA estimation), le signal résultant $\mathbf{y}_t$ est complexe circulaire de distribution gaussienne. Par conséquent, en appliquant la formule de Slepian-Bangs (cf. par exemple, [103, rel. (B.3.25)]), la FIM $\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DA}}$, associée à $(\mathbf{y}_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DA}}\right)_{k,l} &= T\mathrm{Tr}\left(\mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\frac{\partial\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\alpha_k}\mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\frac{\partial\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\alpha_l}\right)\\ &+ 2\sum_{t=0}^{T-1}|\epsilon_t|^2\Re\left(\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H}{\partial\alpha_k}\mathbf{Q}_n^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\frac{\partial\sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\mathbf{a}_1}{\partial\alpha_l}\right).\end{aligned} \tag{6.4.23}$$

Puisque $\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}|\epsilon_t|^2 = 1$, $\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DA}}$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DA}} = T\begin{bmatrix}\mathbf{I}' & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{I}''\end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{s_1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{s_2}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{I}'' = \begin{bmatrix} 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{s_1}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 & 2\sigma_{s_1}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_1'^H \tilde{\mathbf{a}}_1) \\ 0 & 2\sigma_{s_1}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_1'^H \tilde{\mathbf{a}}_1) & 2\sigma_{s_1}^2 \|\mathbf{a}_1'\|^2, \end{bmatrix}$$

et par conséquent, la borne obtenue en inversant cette matrice, coïncide avec la CRB déterministe obtenue dans [72] et a pour expression,

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DA}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\rho_{nu,1}} \right),$$

qui est équivalente aux CRB (6.4.19) et (6.4.20) quand $\rho_{nu,1}$ tend vers ∞.

CRB stochastique pour des signaux complexes gaussiens

Puisque la modulation BPSK et MSK (après prétraitement de dérotation) [resp. QPSK] sont complexes non circulaires [resp. complexe circulaire] au second ordre, il est intéressant de comparer les CRB stochastiques (6.4.19) et (6.4.20) aux CRB associées à des distributions gaussiennes non circulaires de taux de non circularité maximale ou gaussiennes circulaires [72] qui peuvent être considérées comme des majorants par rapport aux vraies bornes (cf. par exemple, [69, corollary 1] ou [103, p. 293]). Ces bornes démontrées dans le chapitre 5 sont données par les expressions suivantes :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\rho_{nu,1}} \left[1 + \frac{1}{2\rho_{nu,1}} \right] \right),$$

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\rho_{nu,1}} \left[1 + \frac{1}{\rho_{nu,1}} \right] \right),$$

nous avons

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} = \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f_2(\rho_{nu,1}))(1 + \frac{1}{2\rho_{nu,1}})},$$

et

$$\frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)} = \frac{1}{(1 - f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2}))(1 + \frac{1}{\rho_{nu,1}})}.$$

Nous notons que ces rapports sont identiques à ceux obtenus dans le cas de bruit spatialement blanc uniforme dépendant seulement de $\tilde{\rho} = \rho_{u,1}$ ou $\rho_{nu,1}$ et convergent tous les deux vers 1 quand $\tilde{\rho}$ tend vers ∞ (cf. figure 6.1). Cependant, les approximations numériques données par les deux égalités (6.3.8) et (6.3.9) dans le cas de bruit blanc uniforme restent valable ici en remplaçant $\rho_{u,1}$ par $\rho_{nu,1}$.

La figure 6.10 considère le cas d'une seule source BPSK ou QPSK. Elle compare différentes CRB normalisées[1] pour $M = 10$ et avec la matrice $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Diag}(\sigma_n^2(1 + \delta_1), \sigma_n^2(1 +$

[1]Les CRB sont calculées pour $T = 1$.

$\delta_2), \ldots, \sigma_n^2(1+\delta_M))$ utilisée dans [32] où $\{\delta_i\}_{i=1}^M$ sont des v.a. IID de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \beta]$ et où le SNR est défini par le SNR "initial" $10\log_{10}(\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2})$ est égal à -10dB ou 0dB [32]. Notons ainsi que pour $\beta = 0$, le bruit est uniforme, i.e., $\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_n^2\mathbf{I}$ et lorsque β augmente le bruit devient de plus en plus blanc non uniforme. Nous remarquons sur cette figure que conformément aux résultats analytiques :

$$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{DET}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1) = \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1) < \mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1),$$

mais que la différence entre ces CRB s'accroît lorsque le bruit est de moins en moins uniforme.

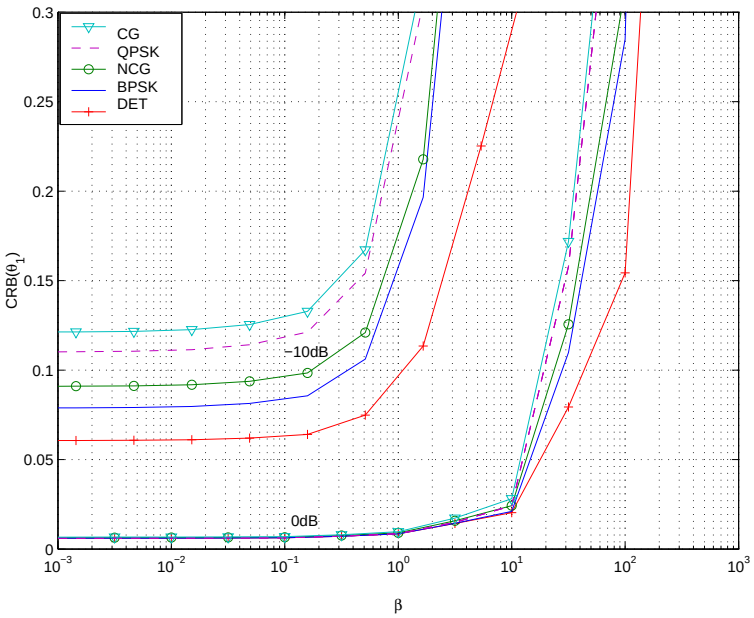

FIG. 6.10 – CRB normalisées ($T = 1$) en fonction de β/σ_n^2.

6.4.2 Cas de plusieurs sources

Comme dans le cas de bruit blanc uniforme, nous considérons deux sources indépendantes BPSK, MSK ou QPSK pour simplifier les notations, bien que les résultats suivants se généralisent immédiatement à un nombre de sources quelconques grâce au découplage entre les paramètres dans la FIM. Puisque la PDF de $\mathbf{y}_t$ est un mélange de 4 PDF gaussiennes ou de 16 PDF gaussiennes, les FIM associées au paramètre $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1}, \phi_1, \theta_1, \sigma_{s_2}, \phi_2, \theta_2)$ ne peuvent être calculées explicitement ainsi que les CRB associées, comme nous avons vu dans le cas d'un bruit complexe circulaire gaussien spatialement blanc uniforme. Cependant pour des grandes valeurs de SNR, plus précisément pour $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_i^2} \gg 1$ et $\sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{s_2}^2}{\sigma_i^2} \gg 1$, le résultat suivant est démontré en adoptant la même démontration que celle du résultat 6.2 en utilisant la méthode de blanchiment ($\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{y}_t$) :

Résultat 6.4 *Les FIM associées aux signaux BPSK, MSK et QPSK affectés par un bruit blanc non uniforme sont approximées par la même expression explicite suivante :*

$$\mathbf{I}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{BPSK}} \approx \mathbf{I}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{MSK}} \approx \mathbf{I}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{QPSK}} \approx T \begin{bmatrix} \mathbf{I}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}'_2 \end{bmatrix} \tag{6.4.24}$$

avec

$$\mathbf{I}'_k = \begin{bmatrix} 2\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\sigma_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sum_{i=1}^{M} \frac{\sigma_{s_k}^2}{\sigma_i} & 2\sigma_{s_k}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) \\ 0 & 2\sigma_{s_k}^2 (i\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \tilde{\mathbf{a}}_k) & 2\sigma_{s_k}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_k'\|^2 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2. \tag{6.4.25}$$

Nous notons que les paramètres associés aux deux sources sont découplés entre eux ainsi qu'avec les paramètres puissance de bruit comme nous avons vu dans la cas de bruit blanc uniforme. Par conséquent, pour deux sources indépendantes et de grandes valeurs de SNR, la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source et nous obtenons pour le paramètre $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ seul :

$$\text{CRB}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{BPSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \text{CRB}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{MSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \text{CRB}_{\text{NU,HSNR}}^{\text{QPSK}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha(\theta_1)} \frac{1}{\rho_{nu,1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha(\theta_2)} \frac{1}{\rho_{nu,2}} \end{bmatrix}. \tag{6.4.26}$$

où $(\alpha_k(\theta_k))_{k=1,2}$ est le facteur $2\left(\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\sigma_m^2}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_k'^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{a}}_k}^{\perp} \tilde{\mathbf{a}}_k'$ et $\rho_{nu,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{s_k}^2 \|\tilde{\mathbf{a}}_k\|^2$. De plus, $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_k)$ et $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}}(\theta_k)$ (i.e., les termes diagonaux de (6.4.26)) pour chaque DOA sont identiques aux CRB (6.4.19) et (6.4.20) d'une seule source obtenue dans le cas où $\rho_{nu,k} \gg 1$. Nous notons que cette propriété est totalement différente de celle obtenue dans le cas de sources de distribution gaussienne circulaire ou dans le cas de la modélisation déterministe. Plus précisément, nous avons démontré dans le chapitre 5 (cf. Résultat 5.12) que pour des sources indépendantes, la CRB stochastique gaussienne circulaire, la CRB gaussienne non circulaire et la CRB déterministe sont équivalentes quand les SNR tendent vers l'infini[2] telle que

$$\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1(\theta_1,\theta_2)} \frac{1}{\sigma_{s_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2(\theta_1,\theta_2)} \frac{1}{\sigma_{s_2}^2} \end{bmatrix} \tag{6.4.27}$$

avec $\sigma_{s_k}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} |s_{k,t}|^2$ et $\beta_k(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2\tilde{\mathbf{a}}_k'^H \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{\mathbf{A}}}^{\perp} \tilde{\mathbf{a}}'_k,\ k = 1, 2$, et $\tilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2)$.

Comme dans le cas de bruit blanc uniforme, des expressions analytiques des CRB ne sont pas accessibles dans le cas de SNR quelconque. Cependant, pour analyser ces bornes, nous avons recours à des approximations numériques obtenues à partir de la loi forte des grands nombres, i.e.,

$$\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{PSK}}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{PSK}\,-1}\right)_{([M+3\ M+6],[M+3\ M+6])} \tag{6.4.28}$$

[2]En imposant la contrainte que les rapports de puissances entre capteurs d'un part et entre sources d'autre part soient constants.

où la FIM associée à $(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{T-1})$ est donnée par :

$$(\mathbf{I}_{\text{PSK}})_{k,l} = \lim_{T' \to \infty} \frac{1}{T'} \sum_{t'=0}^{T'-1} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_{t+t'T}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_{t+t'T}; \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_l} \right) \right]. \tag{6.4.29}$$

CRB supervisée (DA)

Si les symboles étaient connus et les SNR quelconques, en utilisant l'expression (6.4.23) avec cette fois le signal résultant est d'espérance $\sigma_{s_1} e^{i\phi_1} \epsilon_{t,1} \mathbf{a}_1 + \sigma_{s_2} e^{i\phi_2} \epsilon_{t,2} \mathbf{a}_2$ et de matrice de covariance $\mathbf{Q}_n$, nous adoptons le même calcul utilisé dans le cas de bruit blanc uniforme. Nous obtenons simplement que les FIM associées aux modulations BPSK, MSK et QPSK sont identiques à la FIM obtenue pour des grandes valeurs de SNR (6.4.24). Et par conséquent la CRB associée est identique à celle donnée par l'identité (6.4.26).

Illustrations numériques

Les figures 6.11 à 6.13 illustrent les résultats obtenus dans le cas de deux sources. Nous supposons que deux sources de même puissance rayonnent sur une antenne linéaire uniforme de M capteurs pour lequel $\mathbf{a}_k = (1, e^{i\theta_k}, \ldots, e^{i(M-1)\theta_k})^T$. Le SNR est défini comme dans [72] (cf. chapitre 5) par SNR $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \frac{\sigma_{s_1}^2}{{\sigma_i}^2}$ avec $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{10}^2) = (10.0, 2.0, 1.5, 0.5, 8.0, 0.7, 1.1, 3.0, 6.0, 3.0)$ pour $M = 10$ et $M = 6$.

L'expression (6.4.29) nous permet de déterminer le domaine de SNR pour lequel l'approximation (6.4.24) est valide. Comme dans le cas de bruit blanc uniforme, nous observons sur la figure 6.11 que ce domaine de validité de SNR dépend non seulement du type de modulation mais aussi du nombre de capteurs et de la séparation angulaire. Par exemple pour $M = 10$, le seuil de validité est de l'ordre de 4dB [resp. 10dB] pour $\Delta\theta = 0.03$rd et 4dB [resp. 8dB] pour $\Delta\theta = 0.1$rd pour BPSK [resp. QPSK]. De plus, nous voyons sur cette figure que les CRB associées à la modulation BPSK et MSK sont presque identiques.

La figure 6.12 étend les résultats de la figure 6.5 en remplacant respectivement $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ par $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$.

La figure 6.13 étend les résultats de la figure 6.8 en remplaçant respectivement $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$ par $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{BPSK}}(\theta_1)$ et $\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\theta_1)$. A travers son implémentation par l'algorithme EM, les performances de l'algorithme du MV sous hypothèse discrète se révèlent bien supérieures dans un large domaine de SNR, mais seulement dans le cas de faibles séparations angulaires.

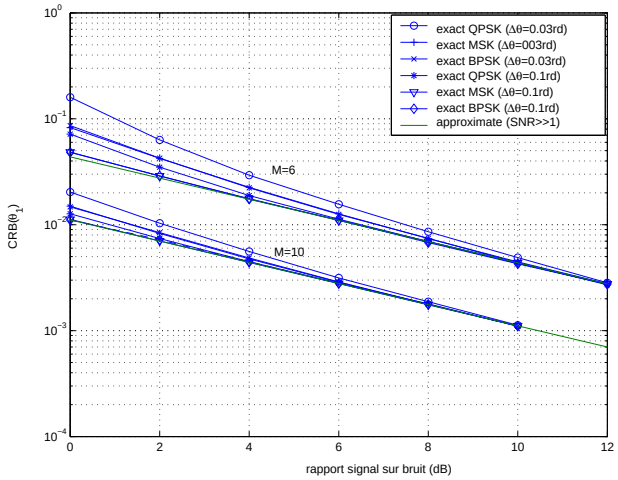

FIG. 6.11 – Valeurs approximées et exactes (obtenues avec $T' = 10000$ et $T = 100$) des $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$,$\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{MSK}}(\theta_1)$ et $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}}(\theta_1)$ en fonction du SNR pour deux valeurs de M et de la séparation angulaire avec $\Delta\phi = 0.1$rd.

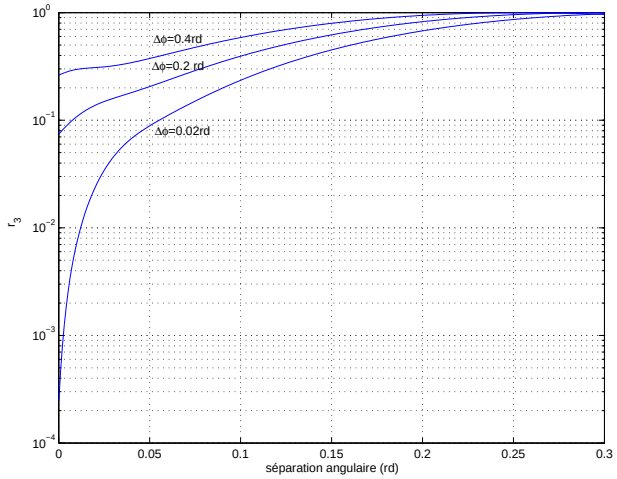

FIG. 6.12 – $r_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)}$ en fonction de la séparation angulaire $\Delta\theta$ pour plusieurs valeurs d'écart de phase de non circularité $\Delta\phi$, M=10 et SNR= $20dB$.

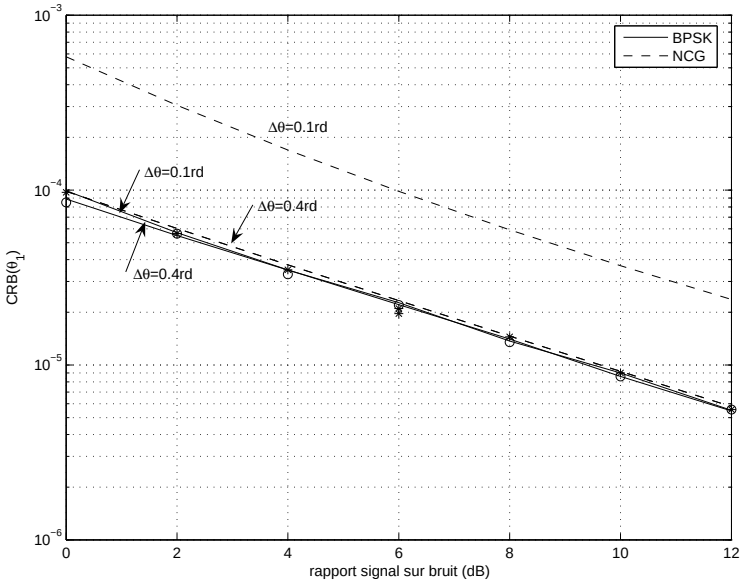

FIG. 6.13 – $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{NCG}}(\theta_1)$ et erreur quadratique estimée (1000 expériences de Monte Carlo) $\mathrm{E}(\theta_{1,T} - \theta_1)^2$ donnée par l'algorithme EM déterministe (10 itérations initialisé dans un voisinage des valeurs exactes) pour $T = 500$, $M = 6$ et $\Delta\phi = 0.1$rd en fonction du SNR .

6.5 Seuil statistique de résolution

Le pouvoir de résolution de sources proches est un très vieux problème étudié dans la littérature, d'abord en astronomie puis en traitement statistique de signal. Pour éviter de possibles confusions, nous distinguerons trois concepts de résolution.

6.5.1 Limite de résolution : caractéristique d'un réseau de capteurs

Basé sur la formation de voies classique, nous pouvons définir la résolution d'un réseau de capteurs indépendamment du champ de sources, de bruit et du nombre d'observations. A partir du lobe principal de la fonction de directivité de la formation de voies associé à une source donnée par :

$$g(\theta) = |\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}_0|^2,$$

où l'on a posé $\mathbf{a}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_0)$, différentes résolutions ont été définies. Parmi elles, la résolution de Fourier et de Rayleigh données respectivement par la largeur du lobe principal et sa largeur à 3 dB. Celui-ci se calcule classiquement en effectuant un développement limité de $g(\theta)$ autour de θ_0, puis en appliquant la définition $g(\theta_0 + \Delta\theta_r/2) = g(\theta_0)/2$. Ceci conduit à la relation générale :

$$\left(\frac{\Delta\theta_r}{2}\right) = \frac{M^2}{2(M\|\mathbf{a}_0'\|^2 - |\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0'|^2)}.$$

Notons que ce résultat dépend en général de la direction d'arrivée de l'onde et de la géométrie de l'antenne. Dans le cas particulier d'une antenne linéaire uniforme de M capteurs, cette limite ne dépend pas de la direction d'arrivée et est donnée par :

$$\Delta\theta_r = 2\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}.$$

6.5.2 La résolution d'un algorithme super résolution

Pour les algorithmes basés sur la recherche de minima locaux d'une fonction de localisation $f_T(\theta)$ (appelée souvent spectre directionnel) tels que les différentes versions de MUSIC, différents critères de résolution de deux sources proches ont été définis à partir de celle-ci. On peut distinguer les approches stochastiques pour lesquelles on définira une probabilité de résolution (cf. par exemple, [56, 58]), des approches déterministes où l'on définira une notion de résolution moyenne. Celle-ci a été la plus étudiée en raison de sa simplicité à l'aide de critères basés sur la fonction de localisation moyenne $\mathrm{E}(f_T(\theta))$.
En effet, il a été démontré dans [47] que $\sqrt{\mathrm{Var}(f_T(\theta))} \ll \mathrm{E}(f_T(\theta))$ au voisinage des vraies valeurs θ_1 et θ_2 de θ pour l'algorithme MUSIC standard. A partir de ce spectre directionnel deux critères ont été définis :

Le critère de Cox [20]
Celui-ci décide que deux sources sont résolues si la moyenne du spectre directionnel $\mathrm{E}(f_T(\theta))$, au point milieu $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ est supérieure à la moyenne du spectre aux deux vraies DOA θ_1 et θ_2.

Kaveh et *al* [47] ont appliqué ce critère aux algorithmes MUSIC et Min Norm standards en recherchant, pour un écart fixé entre les sources, la valeur limite du SNR telle que la moyenne du spectre au point milieu et aux deux vraies DOA aient la même valeur. La formule analytique suivante du seuil de résolution associée à l'algorithme MUSIC standard établie dans le cas de deux sources non corrélées de même puissance ($\sigma^2 = \sigma_{s_1}^2 = \sigma_{s_2}^2$) reçues sur une antenne linéaire uniforme, donne explicitement l'influence des différents paramètres T, SNR et M sur la résolution :

$$\rho_u > \xi_{mg} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\left\{2880\frac{M-2}{M^4}(\Delta\theta)^{-4}\left[1+\sqrt{1+\frac{T}{60}\frac{M^2}{M-2}(\Delta\theta)^2}\right]\right\}, \tag{6.5.30}$$

où $\rho_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M\sigma^2}{\sigma_n^2}$. Ce seuil de résolution ξ_{mg} varie en $(\Delta\theta)^{-4}T^{-1}$ pour $T \ll \frac{60}{M}(\Delta\theta)^{-2}$, ou en $(\Delta\theta)^{-3}T^{-1/2}$ pour $T \gg \frac{60}{M}(\Delta\theta)^{-2}$.

Dans le cas de sources complexes circulaires cohérentes, certaines techniques de lissage spatial et de "forward-backward" ont été introduites pour améliorer les performances des algorithmes sous espaces tel que l'algorithme MUSIC standard [76, 75]. Avec la technique de "forward-backward", une expression analytique approximée du seuil maximal de résolution de SNR similaire à celle dérivée dans [47] a été également démontée dans [76, rel.(34)] pour deux sources complètement cohérentes de même puissance reçues sur une antenne linéaire uniforme. De plus, ce seuil de résolution est proportionnel au seuil de résolution donné par l'égalité (6.5.30) associé à deux sources non corrélées de même puissance avec un facteur de proportionnalité de$\frac{4}{(M\Delta\theta)^2}$.

Notons que l'utilisation des techniques de formation de faisceaux à des algorithmes super résolution tel que l'algorithme MUSIC standard permettant de réduire le coût de calcul et d'améliorer les performances en terme de résolution comme il a été démontré dans [57]. A travers une méthodologie d'analyse de performance de résolution de l'algorithme MUSIC standard composé d'une formation de faisceaux "beamforming", Lee et *al* ont étendu l'expression du seuil de résolution dérivée dans [47] à des sources non corrélées de puissance quelconques rayonnant sur une antenne de capteurs de géométrie arbitraire, et démontrent qu'un choix approprié de la formation de faisceaux permet de réduire significativement le seuil de résolution de l'algorithme MUSIC standard.

Le critère de Sharman et Durrani [96]

Sharman et *al* [96] proposent d'étudier le signe de la dérivée seconde de la moyenne du spectre directionnel au point milieu. Ce critère apparaît naturellement en considérant que si la moyenne du spectre n'a qu'un minimum au voisinage du point milieu, les deux sources ne sont pas résolues. Si au contraire la moyenne du spectre directionnel présente un maximum local au point milieu, les sources sont résolues. La concavité de la courbe au point milieu étant différente dans les deux situations, deux sources seront réputées juste résolues lorsque la dérivée seconde de la moyenne du spectre directionnel au point milieu s'annule. Ces deux situations sont représentées sur la figure 6.14. Sous ce critère, des expressions analytiques

du seuil de résolution associées aux algorithmes MUSIC et min norm standards semblables à celles obtenues dans [47], ont été également démontrées et comparées dans [27] avec une antenne linéaire uniforme.

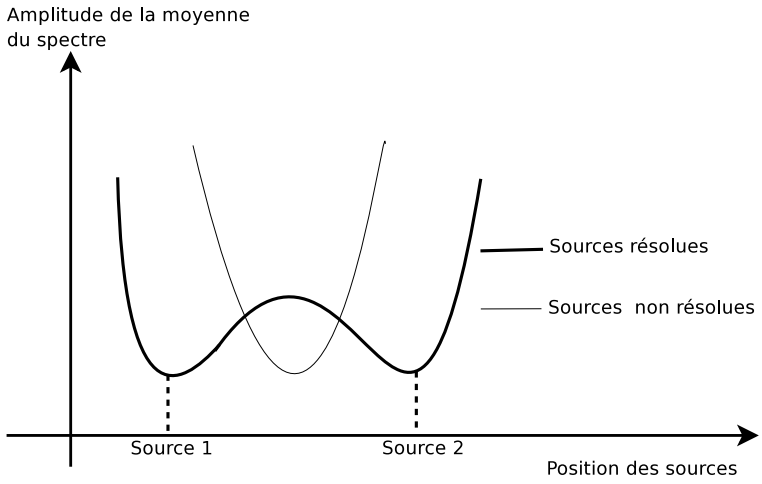

FIG. 6.14 – Exemples de la moyenne des spectres

Ces deux critères dépendent de l'algorithme spécifique, du champ de sources, de bruit, de la géométrie de l'antenne et du nombre d'observations mais *pas en général de la distribution des sources*. Car on peut démontrer (c'est l'objet d'un prolongement de cette thèse) que le spectre directionnel moyen ne dépend que des statistiques du second ordre des sources.

6.5.3 Seuil statistique de résolution discret et gaussien

Les performances des estimateurs du second ordre sont souvent évaluées grâce à la CRB stochastique qui est une borne inférieure sur toute matrice de covariance d'estimateurs sans biais. Bien que la CRB ne donne pas directement accès à la meilleure résolution réalisée par un estimateur sans biais, elle peut être utilisée pour définir un seuil statistique absolu de résolution. Suivant le critère décrit dans [99], deux sources seront résolues si la racine carré de la CRB sur l'écart angulaire estimé $(\theta_{2,T} - \theta_{1,T})$ (soit la borne inférieure de l'écart type de l'écart estimé $\theta_{2,T} - \theta_{1,T}$) est plus petit que cette séparation angulaire $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, i.e.,

$$\sqrt{\mathrm{CRB}(\theta_2 - \theta_1)} < \Delta\theta. \tag{6.5.31}$$

Puisque ce seuil de résolution est basé sur la CRB, il nous permet de caractériser la meilleur résolution de toutes méthodes de super résolution dans le domaine de validité des lois asymptotiques (par exemple, pour des grandes valeurs du nombre d'observation ou du SNR). Dans ces cas, le seuil statistique de résolution fournit une borne de résolution pour tout algorithme asymptotiquement efficace.

Grâce à des propriètés des CRB discrètes et gaussiennes, nous donnons dans les deux paragraphes suivants des expressions interprétables des seuils de résolution associés à des sources discrètes et gaussiennes indépendantes en utilisant l'inégalité (6.5.31).

Seuil de résolution de sources discrètes

Puisque θ_1 et θ_2 associées à deux sources indépendantes BPSK, MSK ou QPSK sont découplées dans les deux expressions de la CRB (6.3.17) et (6.4.26) associées respectivement au bruit blanc uniforme et blanc non uniforme pour des valeurs de SNR élevées, nous obtenons à partir de l'inégalité (6.5.31) :

$$\sqrt{\mathrm{CRB}(\theta_2-\theta_1)} = \sqrt{\mathrm{CRB}(\theta_2)+\mathrm{CRB}(\theta_1)} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{1}{\alpha_1(\theta_1)\rho_{nu,1}}+\frac{1}{\alpha_2(\theta_2)\rho_{nu,2}}\right)} < \Delta\theta.$$

D'où

$$\Delta\theta > \frac{1}{\sqrt{Tr_e}},$$

où $(\alpha_k(\theta_k))_{k=1,2}$ sont des facteurs dépendent de bruit et r_e[3] est le SNR étendu défini par :

$$r_e = \left(\frac{1}{\alpha_1(\theta_1)\rho_{nu,1}}+\frac{1}{\alpha_2(\theta_2)\rho_{nu,2}}\right)^{-1}.$$

Cette résolution borne la résolution statistique de tout estimateur sans biais du paramètre de DOA dans les conditions de deux sources discrètes indépendantes affectées par un bruit blanc non uniforme rayonnant sur un réseau de structure quelconque avec des valeurs de SNR élevées.

Dans le cas de deux sources de même puissance ($\sigma^2 = \sigma^2_{s_1} = \sigma^2_{s_2}$) affectées par un bruit blanc uniforme rayonnant sur une antenne linéaire uniforme, nous avons $(\sigma^2_m)_{m=1,\ldots,M} = \sigma^2_n$, $\rho_{nu,k} = \rho_{u,k}$ et $\alpha_k(\theta_k) = \gamma_k(\theta_k) = \frac{M^2-1}{6}$. Nous obtnons dans ce cas, le seuil statistique de résolution suivant :

$$\rho_u > \xi_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2T}\left(\frac{\Delta\theta_r}{\Delta\theta}\right)^2, \tag{6.5.32}$$

où $\Delta\theta_r \stackrel{\text{def}}{=} 2\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}$ est la limite de Rayleigh.

Seuil de résolution de sources gaussiennes

Nous notons que les expressions de la CRB déterministe associées au bruit blanc uniforme (6.3.18) et blanc non uniforme (6.4.27) établies sans aucune connaissance a priori sur les sources sont similaires. De plus, il a été démontré [55] que dans le cas de bruit blanc uniforme la CRB déterministe est équivalente à une expression interprétable donnée dans [55, rel. (31)] quand $\Delta\theta$ tend vers 0. Nous étendons cette équivalence au cas de bruit blanc non uniforme en adoptant la même démonstration [55, Appendixes A-C] où le vecteur directionnel $\mathbf{a}$ est remplacé par $\tilde{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{a}$, nous obtenons l'équivalence suivante :

$$\beta_k(\theta_1,\theta_2) \sim \frac{||\boldsymbol{\epsilon}||^2}{2}(\Delta\theta)^2, \tag{6.5.33}$$

où $\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\dot{\mathbf{A}}}}\dot{\mathbf{a}}''_0$ est un facteur qui dépend des paramètres de bruit avec $\tilde{\dot{\mathbf{A}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\dot{\mathbf{A}}$ et $\dot{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}'_0]$ et où $\mathbf{a}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_0)$ est le vecteur directionnel associé à $\theta_0 = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ avec $\theta_k = \theta_0 \pm \frac{\Delta\theta}{2}$,

[3] Dans le cas de bruit blanc uniforme, $r_e = \left(\frac{1}{\gamma_1(\theta_1)\rho_{u,1}}+\frac{1}{\gamma_2(\theta_2)\rho_{u,2}}\right)^{-1}$.

$\dot{\mathbf{a}}_0'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{a}_0''$, $\mathbf{a}_0'' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\mathbf{a}_0}{d\theta_0^2}$ et $\mathbf{a}_0' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{a}_0}{d\theta_0}$.
D'après (6.5.33) et l'équivalence entre les CRB (6.4.27) démontrée dans le chapitre 5 (cf. Résultat 5.12) en imposant la contrainte que les rapports de puissances entre capteurs d'un part et entre sources d'autre part soient constants. Soit $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{Q}_n'$ et $\mathbf{R}_x = \sigma^2\mathbf{R}_x''$ avec $\mathbf{Q}_n' = \text{Diag}(\sigma'^2_1, \ldots, \sigma'^2_M)$ et $\mathbf{R}_x'' = \text{Diag}(\sigma'^2_{s_1}, \ldots, \sigma'^2_{s_2})$ deux matrices fixées, nous déduisons :

$$\begin{aligned}\text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{CG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) \sim \text{CRB}_{\text{NU}}^{\text{DET}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{T}\begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1(\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\sigma_{s_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2(\theta_1,\theta_2)}\frac{1}{\sigma_{s_2}^2} \end{bmatrix} \\ &\sim \frac{2}{T}\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}\frac{(\Delta\theta)^{-2}}{||\boldsymbol{\epsilon}||^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma'^2_{s_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma'^2_{s_2}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6.5.34}$$

où ici $\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Pi}^{\perp}_{\tilde{\dot{\mathbf{A}}}}\dot{\mathbf{a}}_0''$ est un facteur qui dépend des coefficients fixés de bruit avec $\tilde{\dot{\mathbf{A}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n'^{-1/2}\dot{\mathbf{A}}$.
Grâce à ce résultat, nous obtenons à partir de l'inégalité (6.5.31) et l'égalité (6.5.34), le seuil statistique de résolution suivant associé à des sources indépendantes gaussiennes rayonnant sur un réseau de structure quelconque :

$$\rho_u > \frac{c}{T}\frac{1}{(\Delta\theta)^4}, \tag{6.5.35}$$

où $c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{M\|\boldsymbol{\epsilon}\|^2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_{s_1}} + \frac{1}{\sigma'^2_{s_2}}\right)$.
Dans le cas particulier de deux sources de même puissance ($\sigma^2 = \sigma_{s_1}^2 = \sigma_{s_2}^2$) affectées par un bruit blanc uniforme rayonnant sur une antenne linéaire uniforme, nous avons $\mathbf{Q}_n' = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_x'' = \mathbf{I}$ et $\tilde{\dot{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}}$. Dans ce cas, nous calculons dans l'annexe 3 la norme $||\boldsymbol{\epsilon}||^2$ qui peut s'écrire en fonction de la limite de Rayleigh sous la forme suivante :

$$||\boldsymbol{\epsilon}||^2 = \frac{32}{10}\frac{M(M^2-4)}{M^2-1}\frac{1}{(\Delta\theta_r)^4}, \tag{6.5.36}$$

et par conséquent, nous obtenons à partir de l'égalité (6.5.35) le seuil statistique de résolution suivant :

$$\rho_u > \xi_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5}{4T}\frac{M^2-1}{M^2-4}\left(\frac{\Delta\theta_r}{\Delta\theta}\right)^4. \tag{6.5.37}$$

Nous notons que le seuil statistique de résolution ξ_g de ρ_u est proportionnel à $\left(\frac{\Delta\theta_r}{\Delta\theta}\right)^4$ contrairement au seuil de résolution ξ_d associé à des distributions discrètes proportionnel à $\left(\frac{\Delta\theta_r}{\Delta\theta}\right)^2$. Ce qui est une conséquence du comportement très différent entre les CRB associées à des distributions complexes gaussiennes et discrètes (cf. figures 6.6 et 6.7).

La figure 6.15 illustre les deux seuils statistiques de résolution associés à des sources discrètes et à des sources gaussiennes, et le seuil de résolution associé à l'algorithme MUSIC standard donnés respectivement par (6.5.32), (6.5.37) et (6.5.30). Nous observons que le seuil statistique de résolution associé à des sources discrètes est très largement inférieur au seuil statistique de résolution associé à des sources gaussiennes. De plus, ces deux seuils sont

inférieurs au seuil de résolution associé à l'algorithme MUSIC standard qui est asymptotiquement efficace quand le SNR tend vers l'infini.

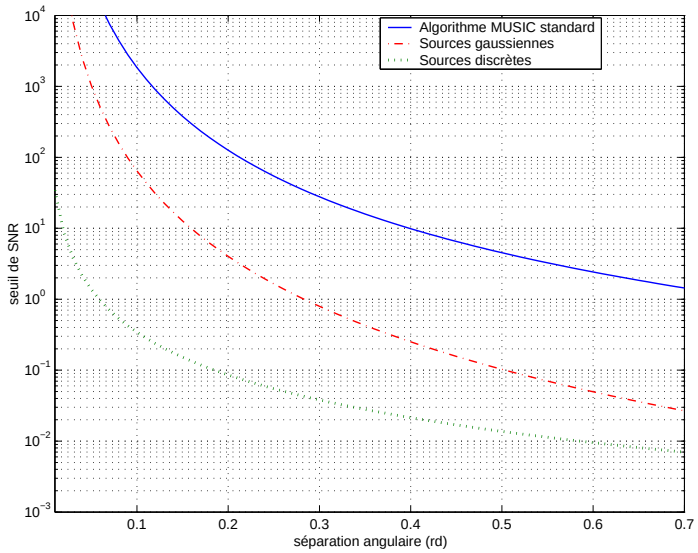

FIG. 6.15 – Seuil de résolution de SNR associé à l'algorithme MUSIC standard, et seuils statistiques de résolution associés à des sources gaussiennes et à des sources discrètes avec un réseau linéaire uniforme de $M = 6$ capteurs et $T = 100$.

Sur la figure 6.16, nous comparons la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ avec la CRB sous la distribution gaussienne complexe circulaire, $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$, en tenant compte de la même connaissance a priori de deux sources indépendantes de taux de non circularité maximale. Nous voyons que la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)$ est beaucoup plus petite que la $\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)$ pour de petites valeurs de séparation angulaire et de SNR ; ce qui explique les comportements précédents des différents seuils statistiques de résolution.

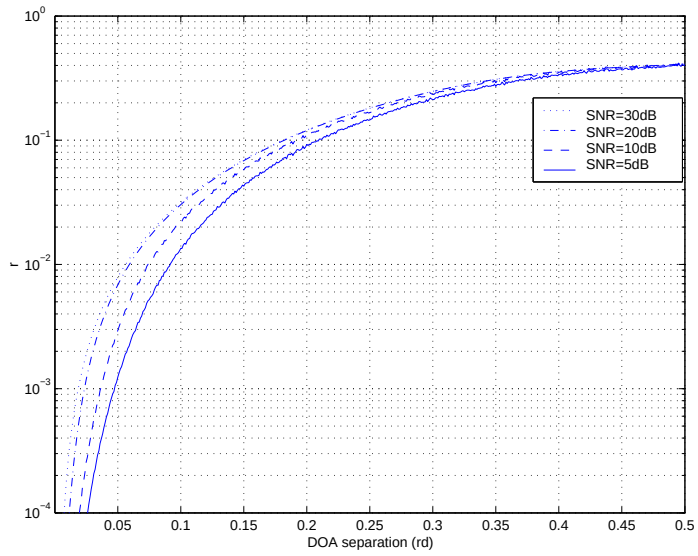

FIG. 6.16 – $r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{BPSK}}(\theta_1)}{\mathrm{CRB}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{CG}}(\theta_1)}$ en fonction de séparation angulaire pour différentes valeurs du SNR avec $M = 6$ et $\Delta\phi = \phi/6$.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les expressions analytiques des CRB obtenues avec un bruit blanc uniforme et avec un bruit blanc non uniforme sont très similaires. Dans le cas d'une seule source, les CRB associées aux modulations BPSK et MSK [resp. QPSK] sont presque identiques aux CRB associées à des distributions complexes gaussiennes non circulaires [resp. circulaires] et égales pour des grandes et faibles valeurs de SNR. Pour deux sources BPSK indépendantes, la CRB sous la distribution BPSK est très largement inférieure à la CRB complexe non circulaire sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire et d'écart de phase. De plus pour des grandes valeurs de SNR, la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source. Pour de tels signaux de modulation, des algorithmes asymptotiquement efficaces tels que la mise en oeuvre du MV auront des performances bien meilleures que celles issues d'algorithmes asymptotiquement efficaces sous distribution gaussienne pour des grandes valeurs des séparations angulaires et des séparations de phase de circularité. Cette différence de comportement est bien expliquée à travers des seuils de résolution de deux sources discrètes et gaussiennes complexes circulaires ou non qui dépendent respectivement de $(\Delta\theta)^{-2}$ et $(\Delta\theta)^{-4}$.

Annexes

Annexe 1 : Preuve du Résultat 6.1

La matrice d'information de Fisher est définie par :

$$\frac{1}{T}\left(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}}\right)_{k,l} = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_k\partial\theta_l}\right) \qquad k,l = 1,\ldots,4, \tag{6.6.38}$$

Dans cette annexe, nous proposons d'évaluer (6.6.38) en considérant d'abord la modulation BPSK. Pour calculer les éléments de (6.6.38), nous calculons tout d'abord les dérivées partielles de *ln* PDF.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}^2} &= -\frac{2M}{\sigma_n^2} + \frac{g_1^2(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}\partial\sigma_n} &= \frac{4\sigma_{s_1}M}{\sigma_n^3} - \frac{2\sigma_{s_1}g_1^2(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^5}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} - \frac{2g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^3}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right) \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_n^2} &= \frac{2\sigma_n^2 M - 6(\sigma_{s_1}^2 M + |\mathbf{y}_t|^2)}{\sigma_n^4} + \frac{4\sigma_{s_1}^2 g_1^2(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^6}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} \\
&+ \frac{6\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1^2} &= \frac{\sigma_{s_1}^2 k_1^2(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} - \frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right) \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}\partial\phi_1} &= -\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)k_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} - \frac{k_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_n\partial\phi_1} &= \frac{2\sigma_{s_1}^2 g_1(\mathbf{y}_t)k_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^5}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} + \frac{2\sigma_{s_1}k_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^3}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right) \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}\partial\theta_1} &= \frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)g_1^{'}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} + \frac{g_1^{'}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right) \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_n\partial\theta_1} &= -\frac{2\sigma_{s_1}^2 g_1(\mathbf{y}_t)g_1^{'}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^5}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} - \frac{2\sigma_{s_1}g_1^{'}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^3}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1^2} &= \frac{\sigma_{s_1}^2 {g_1^{'}}^2(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} + \frac{\sigma_{s_1}g_1^{''}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right) \\
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\phi_1} &= -\frac{\sigma_{s_1}^2 g_1^{'}(\mathbf{y}_t)k_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^4}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)} - \frac{\sigma_{s_1}k_1^{'}(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right),
\end{aligned}$$

avec $g_1^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$, $k_1^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$ et $g_1^{''}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{''})$. En utilisant la propriété classique suivante : $\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \sigma_{s_1}}\right) = 0$, appliquée par exemple à $\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \sigma_{s_1}} = -\frac{2M\sigma_{s_1}}{\sigma_n^2} + \frac{g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)$, nous obtenons :

$$\mathrm{E}\left(g_1(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) = 2M\sigma_{s_1}. \tag{6.6.39}$$

Cette identité nous permet de dériver facilement les termes $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_n,\sigma_n)}$, $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_n,\sigma_{s_1})}$ et $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_{s_1},\sigma_{s_1})}$ de $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}$ grâce à la définition de la fonction $f_1(\rho_{u,1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left(\frac{g_1^2(\mathbf{y}_t)}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right)$.
Pour évaluer $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\phi_1,\phi_1)}$, nous notons $g_1(\mathbf{y}_t) = 2M\sigma_{s_1}\epsilon_t + \left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 + e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t\right)$ et $k_1(\mathbf{y}_t) = \frac{1}{i}\left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t\right)$. Puisque ϵ_t et $\mathbf{n}_t$ sont indépendantes, nous déduisons que ϵ_t et le couple $\left(\left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 + e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t\right), k_1(\mathbf{y}_t)\right)$ sont indépendantes et ces deux dernières variables aléatoires sont gaussiennes non corrélées et par conséquent indépendantes et les trois variables aléatoires ϵ_t, $\left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 + e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t\right)$ et $\frac{1}{i}\left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t\right)$ sont indépendantes et ainsi $g_1(\mathbf{y}_t)$ et $k_1(\mathbf{y}_t)$ sont indépendantes. Cependant,

$$\mathrm{E}\left(\frac{k_1^2(\mathbf{y}_t)}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right) = \mathrm{E}\left(k_1^2(\mathbf{y}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right),$$

avec $\mathrm{E}\left(k_1^2(\mathbf{y}_t)\right) = 2M\sigma_n^2$. Puisque $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right) = f_2(\rho_{u,1})$ et grâce à l'identité (6.6.39), $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\phi_1,\phi_1)}$ est obtenue facilement.
En dérivant $\|\mathbf{a}_1\|^2 = M$ par rapport à θ_1, nous obtenons l'équation suivante $\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'} = 0$, qui nous permet de simplifier $g_1^{'}(\mathbf{y}_t) = \left(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{'} - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^{H'}\mathbf{n}_t\right)$. Par conséquent, $g_1^{'}(\mathbf{y}_t)$ et $g_1(\mathbf{y}_t)$ sont aussi indépendantes. Et puisque, $k_1(\mathbf{y}_t)$ et $g_1^{'}(\mathbf{y}_t)$ sont centrées, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_{s_1},\phi_1)} &= \mathrm{E}(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}\partial\phi_1}) = 0 \;\text{ et }\; (\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_n,\phi_1)} = \mathrm{E}(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_n\partial\phi_1}) = 0 \\
(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_{s_1},\theta_1)} &= \mathrm{E}(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}\partial\theta_1}) = 0 \;\text{ et }\; (\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{(\sigma_n,\theta_1)} = \mathrm{E}(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_n\partial\theta_1}) = 0.
\end{aligned}$$

Considérons le premier terme de $\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1^2}$, en utilisant l'indépendance de $k_1^{'}(\mathbf{y}_t)$ et $g_1(\mathbf{y}_t)$, on obtient :

$$\mathrm{E}\left(\frac{g_1^{'2}(\mathbf{y}_t)}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right) = \mathrm{E}\left(g_1^{'2}(\mathbf{y}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right),$$

avec $\mathrm{E}(g_1^{'2}(\mathbf{y}_t)) = 2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2\sigma_n^2$. Nous notons que le vecteur aléatoire $\left(g_1(\mathbf{y}_t), g_1^{'}(\mathbf{y}_t), k_1(\mathbf{y}_t)\right)$ est la somme d'un vecteur aléatoire discret $(2M\sigma_{s_1}\epsilon_t, 0, 0)$ et d'un vecteur aléatoire centré gaussien

avec une matrice de covariance $\begin{pmatrix} 2M\sigma_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2\sigma_n^2 & -2|\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}|^2\sigma_n^2 \\ 0 & -2|\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}|^2\sigma_n^2 & 2M\sigma_n^2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, les variables aléatoires $g_1(\mathbf{y}_t)$ et $\left(g_1^{'}(\mathbf{y}_t), k_1(\mathbf{y}_t)\right)$ sont indépendantes et cependant l'espérance du premier terme de $\frac{\partial^2 \ln\ p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\phi_1}$ est le produit des espérances

$$\mathrm{E}\left(\frac{g_1^{'}(\mathbf{y}_t)k_1(\mathbf{y}_t)}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right) = \mathrm{E}\left(g_1^{'}(\mathbf{y}_t)g_2(\mathbf{y}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)}\right),$$

avec $\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\mathbf{y}_t)k_1(\mathbf{y}_t)\right) = -2\sigma_n^2(i\mathbf{a}_1^{H'}\mathbf{a}_1)$. Nous regardons maintenant le second terme de $\frac{\partial^2 \ln\ p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1^2}$ et $\frac{\partial^2 \ln\ p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\phi_1}$. Puisque $g_1^{''}(\mathbf{y}_t) = -2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2\sigma_{s_1}\epsilon_t + x_t^{''}$ avec $x_t^{''} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{''} + e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^{''H}\mathbf{n}_t$ et $g_1(\mathbf{y}_t) = 2M\sigma_{s_1}\epsilon_t + x_t$ avec $x_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 + e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t$ où $(x_t^{''}, x_t)$ est centrée gaussienne, nous avons

$$g_1^{''}(\mathbf{y}_t) = -\frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}g_1(\mathbf{y}_t) + x_t^{'} \quad \text{avec} \quad x_t^{'} \stackrel{\text{def}}{=} x_t^{''} + \frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}x_t,$$

où $(x_t, x_t^{'})$ est centrée gaussienne avec $\mathrm{E}(x_t x_t^{'}) = \mathrm{E}(x_t x_t^{''}) + \frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}\mathrm{E}(x_t^2) = -2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2\sigma_n^2 + \frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}(2M\sigma_n^2) = 0$, puisque $\|\mathbf{a}_1\|^2 = M$ qui implique $\frac{d^2\|\mathbf{a}_1\|^2}{d\theta_1^2} = \mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{''} + \mathbf{a}_1^{''H}\mathbf{a}_1 + 2\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2 = 0$. Par conséquent, les variables aléatoires $x_t^{'}$ et $g_1(\mathbf{y}_t)$ sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(g_1^{''}(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) &= \mathrm{E}\left(-\frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}g_1(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) \\
&+ \mathrm{E}(x_t^{'})\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2}{M}\mathrm{E}\left(g_1(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) \\
&= -2\sigma_{s_1}\|\mathbf{a}_1^{'}\|^2,
\end{aligned}$$

d'où l'expression de $(\mathbf{I}_{\mathrm{F}})_{(\theta_1,\theta_1)}$.
Puisque $k_1^{'}(\mathbf{y}_t) = \frac{1}{i}(2\sigma_{s_1}\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})\epsilon_t) + z_t^{''}$ avec $z_t^{''} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i}(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{'} - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{n}_t)$ où $(z_t^{''}, x_t)$ est centrée gaussienne, nous avons

$$k_1^{'}(\mathbf{y}_t) = -\frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}g_1(\mathbf{y}_t) + z_t^{'} \quad \text{avec} \quad z_t^{'} \stackrel{\text{def}}{=} x_t^{''} - \frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}x_t,$$

avec $(x_t, z_t^{'})$ est centrée gaussienne et $\mathrm{E}(x_t z_t^{'}) = \mathrm{E}(x_t z_t^{''}) - \frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}\mathrm{E}(x_t^2) = 2\sigma_n^2\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}) - \frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}(2M\sigma_n^2) = 0$, et comme ϵ_t et $z_t^{'}$ sont indépendantes, nous déduisons que $z_t^{'}$ et $g_1(\mathbf{y}_t)$ sont indépendantes et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}g_1(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) \\
&+ \mathrm{E}(z_t^{'})\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) \\
&= \frac{\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})}{M}\mathrm{E}\left(g_1(\mathbf{y}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}g_1(\mathbf{y}_t)}{\sigma_n^2}\right)\right) = 2\sigma_{s_1}(i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1),
\end{aligned}$$

et puisque $\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'}) = (i\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1)$, d'où l'expression $(\mathbf{I}_{\mathrm{F}})_{(\theta_1,\phi_1)}$.

Pour la modulation MSK, nous adoptons le même calcul où dans les dérivées partielles associées à la modulation BPSK, les fonctions $g_1(\mathbf{y}_t)$, $k_1(\mathbf{y}_t)$, $g_1^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$, $k_1^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$ et $g_1^{''}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{''})$ sont remplacées respectivement par : $g_3(\mathbf{y}_t)$, $k_3(\mathbf{y}_t)$, $g_3^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(i^t s_0 e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$, $k_3^{'}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{'})$ et $g_3^{''}(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{''})$. Puisque $|\epsilon_{1,0}| = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
g_3(\mathbf{y}_t) &= 2\Re(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1) \\
&= 2M\sigma_{s_1}|\epsilon_{1,0}|^2\epsilon_t + 2\Re\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1\right) \\
&= 2M\sigma_{s_1}\epsilon_t + b_t^{'} \\
g_3^{'}(\mathbf{y}_t) &= 2\Re(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{'}) \\
g_3^{''}(\mathbf{y}_t) &= 2\Re(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1^{''}) \\
&= -2\sigma_{s_1}|\epsilon_{1,0}|^2||\mathbf{a}_1^{'}||^2\epsilon_t + 2\Re\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{''}\right) \\
&= -2\sigma_{s_1}||\mathbf{a}_1^{'}||^2\epsilon_t + b_t^{''} \\
k_3(\mathbf{y}_t) &= \frac{2}{i}\Im\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1\right) \\
k_3^{'}(\mathbf{y}_t) &= 2\Im\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1\right) \\
&= 2\sigma_{s_1}|\epsilon_{1,0}|^2\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})^2\epsilon_t + 2\Im\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{'}\right) \\
&= 2\sigma_{s_1}\Im(\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'})^2\epsilon_t + b_t^{'''},
\end{aligned}$$

avec $b_t^{'} \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1\right)$, $b_t^{''} \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{''}\right)$ et $b_t^{'''} \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im\left(i^t\epsilon_{1,0}e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1^{'}\right)$, dont les variances associées $\mathrm{E}(b_t^{'})^2 = 2M\sigma_n^2$, $\mathrm{E}(b_t^{''})^2 = 2||\mathbf{a}^{''}||^2\sigma_n^2$ et $\mathrm{E}(b_t^{''})^2 = 2||\mathbf{a}^{'}||^2\sigma_n^2$ ne dépendant pas de l'instant t et de la valeur $\epsilon_{1,0}$. Par conséquent, le calcul précédent utilisé dans la dérivation de la FIM associée à la modulation BPSK peut être étendu et nous obtenons que $\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}} = \sum_{t=1}^{T}(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}})_t = T\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{BPSK}}$ avec $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{MSK}})_t = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\ p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_k\partial\theta_l}\right)$.

Pour la modulation QPSK, nous adoptons le même cheminement utilisé dans cette annexe avec la modulation BPSK. Ces différentes dérivées partielles et leurs espérances sont dérivées de la même manière en rassemblant les vraisemblances associées à $g_1(\mathbf{y}_t)$ et $k_1(\mathbf{y}_t)$ et en tenant compte de l'indépendance de $\Re(\epsilon_{t,1})$ et $\Im(\epsilon_{t,1})$ (cf. annexe 4).

Annexe 2 : Preuve de (6.3.16)

Dans le cas de deux sources, notons qu'à partir de (6.2.2), la fonction ln PDF associée à la modulation BPSK peut s'écrire comme :

$$\ln p_{\mathrm{BPSK}}(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha}) = Cte - M\ln(\sigma_n^2\pi) - \frac{\|\mathbf{y}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2\|\mathbf{a}_1\|^2 + \sigma_{s_2}^2\|\mathbf{a}_2\|^2}{\sigma_n^2} + \ln\left(\sum_{j=1}^{4} e^{-\frac{h_j}{\sigma_n^2}}\right). \quad (6.6.40)$$

avec

$$h_1 \stackrel{\text{def}}{=} g_1 + g_2 + g_{1,2},\ h_2 \stackrel{\text{def}}{=} g_1 - g_2 - g_{1,2},\ h_3 \stackrel{\text{def}}{=} -g_1 + g_2 - g_{1,2} \text{ and } h_4 \stackrel{\text{def}}{=} -g_1 - g_2 + g_{1,2}$$

où

$$g_k = (e^{i\phi_k}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_k + e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{y}_t) \text{ et } g_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{s_1}\sigma_{s_2}(e^{i(\phi_1-\phi_2)}\mathbf{a}_2^H\mathbf{a}_1 + e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_2) \quad k=1,2,$$

avec $\mathbf{y}_t = \sigma_{s_1}e^{i\phi_1}\epsilon_{t,1}\mathbf{a}_1 + \sigma_{s_2}e^{i\phi_2}\epsilon_{t,2}\mathbf{a}_2 + \mathbf{n}_t$.
Dans la suite, nous proposons de calculer le terme associé à ϕ_1 et ϕ_2 (i.e., $(\mathbf{I}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{PSK}})_{\phi_1,\phi_2}$) et les autres termes peuvent être obtenus de la même manière afin de donner les expressions approximées de ces termes. En dérivant (6.6.40) par rapport à ϕ_k, on obtient :

$$\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k} = -\frac{1}{\sigma_n^2}\frac{\sum_{j=1}^4 \frac{\partial h_j}{\partial \phi_k} e^{-\frac{h_j}{\sigma_n^2}}}{\sum_{j=1}^4 e^{-\frac{h_j}{\sigma_n^2}}} \qquad k=1,2. \tag{6.6.41}$$

En conditionnant cette dérivée par rapport à différents couples de symboles $(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2}) = (\eta_{l,1},\eta_{l,2})_{l=1,\ldots,4}$, nous prouvons que parmi les quatre exponentielles dans (6.6.41), trois sont négligeables par rapport à un terme dominant. Par exemple, en conditionnant cette dérivée par rapport $(\eta_{l,1},\eta_{l,2})_{l=1} = (-1,-1)$, nous avons pour $M\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$ et $M\frac{\sigma_{s_2}^2}{\sigma_n^2} \gg 1$:

$$\begin{aligned}
-\frac{h_1}{\sigma_n^2} &= \frac{2M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} - n_1^{'} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2} \approx \frac{2M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2}\\
-\frac{h_2}{\sigma_n^2} &= \frac{2M(\sigma_{s_1}^2-\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} - n_2^{'} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2} \approx \frac{2M(\sigma_{s_1}^2-\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2}\\
-\frac{h_3}{\sigma_n^2} &= \frac{2M(\sigma_{s_2}^2-\sigma_{s_1}^2)}{\sigma_n^2} + n_2^{'} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2} \approx \frac{2M(\sigma_{s_2}^2-\sigma_{s_1}^2)}{\sigma_n^2} + \frac{g_{1,2}}{\sigma_n^2}\\
-\frac{h_4}{\sigma_n^2} &= -\frac{2M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} + n_1^{'} - \frac{3g_{1,2}}{\sigma_n^2} \approx -\frac{2M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} - \frac{3g_{1,2}}{\sigma_n^2},
\end{aligned}$$

où $(n_k^{'})_{k=1,2}$ sont des variables aléatoires centrées gaussiennes de variance $\frac{2}{\sigma_n^2}\left(M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2) - (-1)^k\Re(\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}\mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_2)\right) > \frac{2M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2-\sigma_{s_1}\sigma_{s_2})}{\sigma_n^2}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-\frac{h_1}{\sigma_n^2} - \left(-\frac{h_2}{\sigma_n^2}\right) &\approx \frac{2M\sigma_{s_2}^2}{\sigma_n^2} \gg 1\\
-\frac{h_1}{\sigma_n^2} - \left(-\frac{h_3}{\sigma_n^2}\right) &\approx \frac{2M\sigma_{s_1}^2}{\sigma_n^2} \gg 1\\
-\frac{h_1}{\sigma_n^2} - \left(-\frac{h_4}{\sigma_n^2}\right) &\approx \frac{4M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} + \frac{4g_{1,2}}{\sigma_n^2} \geq \frac{4M(\sigma_{s_1}^2+\sigma_{s_2}^2-2\alpha\sigma_{s_1}\sigma_{s_2})}{\sigma_n^2}\\
&\geq \frac{8M\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}(1-\alpha)}{\sigma_n^2} \geq \frac{8M(1-\alpha)\mathrm{Inf}(\sigma_{s_1}^2,\sigma_{s_2}^2)}{\sigma_n^2} \gg 1,
\end{aligned}$$

où α est défini par la relation $\mathrm{Inf}(g_{1,2}) = -2M\alpha\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}$ satisfaite pour toutes les antennes classiques $\alpha < 0.5$. Par exemple, pour une antenne linéaire uniforme de M capteurs nous avons :

$$g_{1,2} = 2\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}\cos(\Delta\phi + \frac{(M-1)\Delta\theta}{2})\left(\frac{\sin(\frac{M\Delta\theta}{2})}{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}\right) \quad \text{et} \quad \alpha \approx 0.224.$$

Par conséquent, les termes $e^{-\frac{h_2}{\sigma_n^2}}$, $e^{-\frac{h_3}{\sigma_n^2}}$ et $e^{-\frac{h_4}{\sigma_n^2}}$ sont dominés par le terme $e^{-\frac{h_1}{\sigma_n^2}}$ et que :

$$\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k} \approx -\frac{1}{\sigma_n^2}\frac{\partial h_1}{\partial \phi_k} = -\frac{1}{\sigma_n^2}\left(\frac{\partial g_k}{\partial \phi_k} + \frac{\partial g_{1,2}}{\partial \phi_k}\right) = -\frac{i\sigma_k}{\sigma_n^2}(e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k - e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{n}_t).$$

Nous obtenons pour un couple arbitraire de symboles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k} &\approx -\frac{i\sigma_k}{\sigma_n^2}(e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k - e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{n}_t) \quad k=1,2,\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} - (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} + (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} - 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right)\end{aligned}$$

En suivant la même procédure, nous avons pour $k=1,2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \theta_k} &\approx -\frac{\sigma_k}{\sigma_n^2}(e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k^{'} + e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^{H^{'}}\mathbf{n}_t)\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} - (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} + (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} - 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right)\\ \frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \sigma_k} &\approx -\frac{1}{\sigma_n^2}(e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k + e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{n}_t)\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} - (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} + (-1)^k 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} - 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right)\\ \frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \sigma_n} &\approx -(\frac{2M}{\sigma_n} + \frac{2\|\mathbf{n}_t\|^2}{\sigma_n^3})\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_1}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_2} &\approx -\frac{\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}}{\sigma_n^4}(e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t)(e^{i\phi_2}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_2 - e^{-i\phi_2}\mathbf{a}_2^H\mathbf{n}_t)\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} - 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} - 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right)\\ \frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k} &\approx -\frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^4}(e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k - e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{n}_t)^2\\ &\left(1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)} + 1_{(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)}\right).\end{aligned}$$

Et puisque $(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})$ et $\mathbf{n}_t$ sont indépendantes et les quatre couples de symboles sont équiprobables, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_1}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_2}\right) &\approx -\frac{\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}}{\sigma_n^4}\mathrm{E}\left((e^{i\phi_1}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_1 - e^{-i\phi_1}\mathbf{a}_1^H\mathbf{n}_t)(e^{i\phi_2}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_2 - e^{-i\phi_2}\mathbf{a}_2^H\mathbf{n}_t)\right)\\ &(P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)] - P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)] - P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)]\\ &+P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)]) = 0,\\ \mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k}\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial \phi_k}\right) &\approx -\frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^4}\mathrm{E}\left((e^{i\phi_k}\mathbf{n}_t^H\mathbf{a}_k - e^{-i\phi_k}\mathbf{a}_k^H\mathbf{n}_t)^2\right)\\ &(P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,-1)] + P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(-1,+1)] + P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,-1)]\\ &+P[(\epsilon_{t,1},\epsilon_{t,2})=(+1,+1)]) = \frac{2M\sigma_k^2}{\sigma_n^2}.\end{aligned}$$

Les autres termes de (6.3.16) sont calculés de la même façon en utilisant en plus la propriété $\|\mathbf{a}_1\|^2 = M$ qui implique que $\mathbf{a}_1^{'H}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^H\mathbf{a}_1^{'} = 0$.

Pour la modulation MSK, nous adoptons la même procédure en remplaçant respectivement g_1 et g_2 par $g_3 \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(i^t e^{i\phi_1}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_1)$ et $g_4 \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(i^t e^{i\phi_2}\mathbf{y}_t^H\mathbf{a}_2)$. En utilisant un mélange de 16 PDF gaussiennes circulaires, l'extention à deux sources QPSK se fait de la même manière.

Annexe 3 : Preuve de (6.5.36)

Le carré de la norme de $\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{I} - \dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{A}}^H\dot{\mathbf{A}})^{-1}\dot{\mathbf{A}}^H]\mathbf{a}_0^{''}$, est donné après simplification par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{\epsilon}_2||^2 &= ||\mathbf{a}_0^{''}||^2 - \frac{12}{M^2(M^2-1)}(||\mathbf{a}_0^{'}||^2(\mathbf{a}^{''H}{}_0\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0^{''}) + (\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0^{'})(\mathbf{a}^{''H}{}_0\mathbf{a}_0^{'})(\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0^{''}) \\ &+ (\mathbf{a}^{'H}{}_0\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}^{''H}{}_0\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}^{'H}{}_0\mathbf{a}_0^{''}) + (\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}^{''H}{}_0\mathbf{a}_0^{'})(\mathbf{a}^{'H}{}_0\mathbf{a}_0^{''})). \end{aligned} \tag{6.6.42}$$

Un calcul élémentaire montre que les produits vectoriels suivants valent :

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a}_0^{'}||^2 &= \frac{M(M-1)(2M-1)}{6} \\ ||\mathbf{a}_0^{''}||^2 &= \frac{M(M-1)}{30}(6M^3 - 9M^2 + M + 1) \\ \mathbf{a}_0^{'H}\mathbf{a}_0 &= -i\frac{M(M-1)}{2} \\ \mathbf{a}_0^{''H}\mathbf{a}_0 &= -\frac{M(M-1)(2M-1)}{6} \\ \mathbf{a}_0^{''H}\mathbf{a}_0 &= i\frac{M^2(M-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

D'où

$$(\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0^{'})\mathbf{a}_0^{''H}\dot{\mathbf{a}}_0^{'}\mathbf{a}_0^H\mathbf{a}_0^{''} + (\mathbf{a}_0^{'H}\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0^{''H}\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^{'H}\mathbf{a}_0^{''} = -\frac{M^3(M-1)^4(2M-1)}{24}.$$

En reportant ces expressions dans (6.6.42), on obtient alors l'expression de la norme donnée par l'identité (6.5.36).

Annexe 4 : Preuve du Résultat 6.3

Nous développons ici la démonstration dans le cas de la modulation QPSK et nous adoptons le même cheminement dans le cas des modulations BPSK et MSK.
Dans le cas d'une seule source affectée par un bruit blanc non uniforme, les PDF données par (6.2.2) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} p_{\text{BPSK}}(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-(\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2)} \cosh\left(\sigma_{s_1} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \\ p_{\text{MSK}}(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-(\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2)} \cosh\left(\sigma_{s_1} g_3(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \\ p_{\text{QPSK}}(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{\pi^M \text{Det}(\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma}))} e^{-(\|\tilde{\mathbf{y}}_t\|^2 + \sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2)} \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \cosh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}} k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{y}_t$, $\tilde{\mathbf{a}}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{a}_1$, $g_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1) = 2\sigma_{s_1}\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2\Re(\epsilon_{t,1}) + 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$, $g_3(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i^t s_{1,0}\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1) = 2\sigma_{s_1}\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2\epsilon_t + 2\Re(i^t s_{1,0}e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$ et $k_1(\mathbf{y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sigma_{s_1}\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2\Im(\epsilon_{t,1}) + 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$.

Pour montrer le découplage entre les paramètres puissance $(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{s_1})$ et phase (ϕ_1, θ_1), nous démontrons dans la suite que les termes de FIM suivants sont nuls :

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_k)} &= -\text{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_k}\right) &= 0\\
(\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_k)} &= -\text{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_k}\right) &= 0\\
(\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_k)} &= -\text{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_{s_1}}\right) &= 0\\
(\mathbf{I}_{\text{NU}}^{\text{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_k)} &= -\text{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_{s_1}}\right) &= 0,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_k} &= \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}l_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\\
&+ \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}t_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_k} &= -\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) - \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\\
&+ \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_{s_1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}}{2}g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}}{2}k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_{s_1}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) - \frac{\sigma_{s_1}}{2}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}}{2}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1^2} &= \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}g_1^{'\,2}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\\
&+ \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}k_1^{'\,2}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\phi_1} &= -\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) - \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)} \\ &+ \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1^2} &= -\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}k_1^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)} \\ &- \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) + \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}g_1^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) = -2\sigma_{s_1}|\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}|\Im(\epsilon_{t,1}) + 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) \\
k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) = 2\sigma_{s_1}|\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}|\Re(\epsilon_{t,1}) + 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) \\
l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} -2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1) \\
&= -2\sigma_{s_1}(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1)\Re(\epsilon_{t,1}) - 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1) \\
t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} -2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1) \\
&= -2\sigma_{s_1}(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1)\Im(\epsilon_{t,1}) - 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1) \\
l_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} -2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) \\
&= 2\sigma_{s_1}|(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})|\Im(\epsilon_{t,1}) - 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) \\
t_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &\stackrel{\text{def}}{=} -2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{y}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) \\
&= -2\sigma_{s_1}|(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})|\Re(\epsilon_{t,1}) - 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\sigma})$ et $\tilde{\mathbf{n}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_n^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}_t$.

Notons que $(\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}), \Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1))$ est une variable aléatoire centrée gaussienne avec $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})$ et $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$ non corrélées (puisque la dérivée de $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2}$ par rapport θ_1 vaut $\frac{d\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}{d\theta_1} = \tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'} + \tilde{\mathbf{a}}_1^{'H}\tilde{\mathbf{a}}_1 = 0$). Par conséquent ces deux variables aléatoires sont indépendantes.

De même chacun des deux couples aléatoires $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})$ et $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$, $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})$ et $\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1)$ sont centrés gaussiens indépendants (puisque la dérivée $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2}$ par rapport θ_1 et σ_k^2 vaut $\frac{d^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}{d\theta_1 d\sigma_k^2} = \tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1^{'} + \tilde{\mathbf{a}}_1^{'H}\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1 = 0$). Et comme les couples $(\epsilon_{t,1}, \mathbf{n}_t)$ et $(\Re(\epsilon_{t,1}), \Im(\epsilon_{t,1}))$ sont constitués de variables aléatoires indépendantes, nous en déduisons que les variables aléatoires suivantes $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $l_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $l_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ sont respectivement indépendantes.

Puisque $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ ont la même loi de probabilité, les variables aléatoires suivantes $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$

et $k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $t_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $t_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ sont également indépendantes. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_k)} &= -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_k}\right) = -\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(l_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(t_k^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right) = 0.\\
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\theta_k,\sigma_{s_1})} &= -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\theta_1\partial\sigma_{s_1}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}}{2}\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}}{2}\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Puisque $(\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1),\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1))$, $(\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1),\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1))$, $(\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1),\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1))$ sont des variables centrées gaussiennes telles que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\right) &= \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 - \|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2 = 0\\
\mathrm{E}\left(\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1)\right) &= \mathrm{E}\left(\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1)\right)\\
&= \tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1 - \tilde{\mathbf{a}}_1^H\mathbf{Q}_n^{-1/2}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{Q}_n^{-1/2}\tilde{\mathbf{a}}_1\\
&= 0,
\end{aligned}$$

et comme $\epsilon_{t,1}$ et $\mathbf{n}_t$, $\Re(\epsilon_{t,1})$ et $\Im(\epsilon_{t,1})$ sont indépendantes, nous déduisons que les variables $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ sont aussi indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\phi_1,\sigma_k)} &= -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_k}\right) = \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&+ \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(l_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(t_k(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\phi_1,\sigma_{s_1})} &= -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\phi_1\partial\sigma_{s_1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&+ \frac{\sigma_{s_1}}{2}\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}}{2}\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Puisque $\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln\, p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\alpha})}{\partial\sigma_{s_1}}\right) = 0$, ceci implique $\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) + \mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) = 2\sqrt{2}\sigma_{s_1}\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2$ et $\mathrm{E}(k_1^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)) = 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^4 + 2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2$. De plus $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ ont la même distribution de probabilité, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\phi_1,\phi_1)} &= \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) + \mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\right)\\
&- \sigma_{s_1}^2\mathrm{E}\left(k_1^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\\
&= 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2\left(1-(1+\rho_{u,1})\,f_2\left(\frac{\rho_{u,1}}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

avec $\rho_{nu,1} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2$ et $f_2(\frac{\rho_{nu,1}}{2}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)$.

En dérivant deux fois $\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2$ par rapport à θ_1, on obtient $\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{''} = -\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2$ car $\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{''}$ est purement réel quel que soit le réseau de capteurs. Nous écrivons $k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ sous les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &= \frac{\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t) + z_t^{''}\\
g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t) &= -\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t) + x_t^{''}
\end{aligned}
$$

avec $z_t^{'} = -\frac{\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}z_t + z_t^{''}$ et $x_t^{'} = \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}z_t + x_t^{''}$ où $z_t \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$, $z_t^{''} \stackrel{\text{def}}{=} 2\Im(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1)$ et $x_t^{''} \stackrel{\text{def}}{=} 2\Re(e^{i\phi_1}\tilde{\mathbf{n}}_t^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{''})$ $(z_t, z_t^{'})et(z_t, x_t^{'})$ deux variables aléatoires indépendantes centrées gaussiennes avec $\mathrm{E}(z_t z_t^{'}) = 0$ et $\mathrm{E}(z_t x_t^{'}) = 0$ ainsi z_t est indépendante à la fois de $z_t^{'}$ et $x_t^{'}$. Et comme $\epsilon_{t,1}$ et $\mathbf{n}_t$ sont indépendantes, nous déduisons que $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ est indépendante à la fois de $z_t^{'}$ et de $x_t^{'}$ et donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) &= \frac{\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
\mathrm{E}\left(g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) &= -\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Nous adoptons la même procédure que précédemment en remplaçant respectivement $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ par $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, $g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $k_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) &= -\frac{\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\\
\mathrm{E}\left(k_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right) &= -\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right).
\end{aligned}$$

Puisque $g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ est indépendante à la fois de $g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et de $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$, ainsi $k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ et $k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)$ sont indépendantes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\theta_1,\theta_1)} &= -\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{E}\left(g_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)+\mathrm{E}\left(k_1^{''}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\left(\mathrm{E}\left({g_1^{'}}^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)+\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{E}\left({k_1^{'}}^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)}\right)\right)\\
&= \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\right)\left(\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)+\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\right)\\
&- \sigma_{s_1}^2\mathrm{E}\left({g_1^{'}}^2(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)f_2\left(\frac{\rho_{u,1}}{2}\right) = 2\sigma_{s_1}^2\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2\left(1-(1+\frac{\rho_{u,1}}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}|^2}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2})f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right)\\
(\mathbf{I}_{\mathrm{NU}}^{\mathrm{QPSK}})_{(\theta_1,\phi_1)} &= \frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})}{\|\tilde{\mathbf{a}}_1\|^2}\right)\left(\mathrm{E}\left(g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)+\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{E}\left(k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\tanh\left(\frac{\sigma_{s_1}}{\sqrt{2}}k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)\right)\\
&- \frac{\sigma_{s_1}^2}{2}\left(\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)-\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right)\right)f_2\left(\frac{\rho_{u,1}}{2}\right)\\
&= 2\sigma_{s_1}^2 i(\tilde{\mathbf{a}}_1^{'H}\tilde{\mathbf{a}}_1)\left(1-(1+\rho_{u,1})f_2(\frac{\rho_{u,1}}{2})\right)
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{E}\left(g_1^{'2}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) = \mathrm{E}\left(k_1^{'2}(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) = 2\sigma_{s_1}^2|\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}|^2 + 2\|\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}\|^2$ et $\mathrm{E}\left(k_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)g_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) = -\mathrm{E}\left(g_1^{'}(\tilde{\mathbf{y}}_t)k_1(\tilde{\mathbf{y}}_t)\right) = -\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'})(1+\rho_{u,1})$ où $\Im(\tilde{\mathbf{a}}_1^H\tilde{\mathbf{a}}_1^{'}) = i(\tilde{\mathbf{a}}_1^{'H}\tilde{\mathbf{a}}_1)$.

Chapitre 7

Estimateur asymptotique de variance minimale dans le cas singulier et efficacité

7.1 Introduction

Parmi les méthodes de recherches multidimensionnelles paramétriques qui sont largement appliquées à divers problèmes de traitement statistique du signal, on trouve par exemple, l'estimateur MV, l'estimateur AMV et les algorithmes SF et WSF (cf. par exemple, [69, 66]). L'estimateur consistant AMV a été introduit par Stoica et *al* dans [101] sous le nom d'estimateur *asymptotiquement best consistant* (ABC) et par Porat et Friedlander [80] dans l'estimation des paramètres ARMA de processus gaussiens à valeurs réelles à partir des statistiques du second ordre. Cet estimateur a été ensuite étendu à des statistiques d'ordres supérieures (cf. par exemple, [81, 29]) et à des observations complexes non circulaires [22]. Cependant dans ces applications, ces estimateurs sont dérivés et analysés sous l'hypothèse que la première matrice de covariance de la distribution asymptotique des statistiques considérées est non singulière. Mais dans de nombreuses applications, des algorithmes de type sous espace sont largement appliqués et ces algorithmes sont construits à partir des matrices de projecteurs orthogonaux estimées associées à des distributions complexes circulaires ou non, ont une première matrice de covariance asymptotique singulière. Parmi les résultats génériques en terme de performance asymptotique sur des algorithmes de type sous espace circulaires citons la généralisation de l'algorithme WSF qui a été discutée dans [10], qui montre l'équivalence entre l'algorithme WSF et l'algorithme subspace matching (SM).

Dans ce chapitre, après avoir présenté quelques exemples d'illustrations en se basant sur des résultats obtenus dans le chapitre 4 dans le cadre d'estimation du paramètre de DOA et sur des travaux dans le contexte d'estimation de réponses impulsionnelles de canaux SIMO et SISO [64, 51, 23] , nous étendons les résultats théoriques standards de l'estimateur AMV à une suite de statistiques réelles ou complexes dont la première matrice de covariance asymp-

totique est singulière. Nous démontrons différents résultats asymptotiques sur les matrices de projecteurs orthogonaux estimés, en étendant l'estimateur AMV à ces différentes matrices de projecteurs empiriques obtenues à partir des EVD ou SVD des estimées des matrices de covariance spatiales des observations complexes circulaires ou non circulaires où des expressions explicites des bornes AMV associées sont démontrées. Nous comparons ces résultats aux résultats génériques de Cardoso et Moulines [64] associés aux algorithmes sous espaces WSF et SM. Grâce à ces bornes AMV, nous avons démontré que dans le cas où il n'y aurait aucune connaissance a priori sur les signaux sources gaussiens complexes circulaires ou non circulaires, ces bornes inférieures coïncident avec des expressions des CRB stochastiques du paramètre de DOA seul présentées dans le chapitre 5. Ces résultats sont étendus ensuite au cas de paramètres multiples par source. Nous avons également étendu ces résultats au cas de modèles paramétriques plus généraux $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$ en supposant que les signaux $\mathbf{x}_t$ sont gaussiens complexes circulaires ou non, $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont indépendants, $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont non corrélés, $\mathbf{n}_t$ gaussien circulaire avec $\mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$ et le paramètre Θ est identifiable par divers projecteurs orthogonaux. Nous avons enfin illustré cette borne AMV dans le cas d'estimation de réponses impulsionnelles du canal SISO.

7.2 Exemple illustratif

Dans cette section, nous adoptons les notations utilisées dans le chapitre 4. D'après ce dernier chapitre, pour des signaux sources complexes circulaires ou non, nous avons démontré que les paramètres de DOA peuvent être estimés aussi bien en utilisant l'algorithme MUSIC construit à partir du projecteur orthogonal estimé $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ associé au sous espace bruit de $\mathbf{R}_{y,T}$ qu'à partir de l'algorithme sous espace de type MUSIC construit à partir du projecteur orthogonal estimé $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ associé au sous espace bruit de $\mathbf{R}'_{y,T}$ obtenu en remplaçant la EVD de $\mathbf{R}_{y,T}$ par la SVD de $\mathbf{R}'_{y,T}$. Nous avons démontré que les performances asymptotiques de ces deux algorithmes restent très similaires. En particulier, dans le cas d'une seule source complexe non circulaire, les variances asymptotiques associées aux algorithmes sous espaces basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et seulement sur $\mathbf{R}'_{y,T}$ sont données respectivement par :

$$\mathbf{C}_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{M}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right] \text{ et } \mathbf{C}_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1\rho_1^2}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{M}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right],$$

avec α_1 est un facteur purement géométrique et où ρ_1 $(0 \leq \rho_1 \leq 1)$ est le taux de non circularité.

D'après ces expressions, nous observons que la variance C_{θ_1} associée à l'algorithme sous espace basé seulement sur $\mathbf{R}'_{y,T}$ est égale à la variance associée à l'algorithme sous espace basé seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ qui est égale à la CRB gaussienne complexe circulaire (cf. chapitre 5) quand $\rho_1 = 1$, et tend vers l'infini lorsque ρ_1 tend vers zéro, par conséquent la seconde matrice de covariance n'apporte aucune information sur θ_1.

En plus d'applications d'estimation de DOA, l'algorithme sous espace construit à partir du

projecteur $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ associé à $\mathbf{R}_{y,T}$ a été appliqué également à l'estimation de réponses impulsionnelles des canaux SIMO et SISO [64] et SISO [23], qui peut être étendu facilement en considérant le projecteur $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ associé à $\mathbf{R}'_{y,T}$ seule comme nous avons vu dans le chapitre 4. Par conséquent, le problème suivant s'impose : comment combiner ces deux statistiques $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ pour améliorer les estimées de $\boldsymbol{\theta}$ qui contient les paramètres de DOA ou les paramètres de réponses impulsionnelles d'un canal ?
Une autre idée pour estimer $\boldsymbol{\theta}$ à partir de $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ consiste à utiliser d'algorithmes de type sous espace construits à partir de la matrice du projecteur orthogonal estimée $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ associé au sous espace bruit de la matrice de covariance estimée $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ du modèle étendu d'observation $\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_t^T, \mathbf{y}_t{}^H)^T$. Par exemple, dans le cas d'estimation de DOA de signaux sources complexes non circulaires, non corrélés de taux de non circularité maximale, des algorithmes MUSIC sont proposés et analysés dans le chapitre 4, et en particulier dans le cas d'une seule source, ces algorithmes sont asymptotiquement efficaces dont la variance asymptotique est égale à la CRB gaussienne complexe non circulaire (cf. chapitre 5) donnée par :

$$\mathbf{C}_{\theta_1} = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{x_1}^2} + \frac{1}{2M}\frac{\sigma_n^4}{\sigma_{x_1}^4}\right],$$

qui est identique à la CRB gaussienne circulaire pour des grandes valeurs de SNR et égale à la moitié de cette dernière borne pour des faibles valeurs de SNR. Dans le cas général où la matrice de covariance des sources associées au modèle étendu est arbitraire, des comparaisons numériques montrent l'intérêt très limité de l'algorithme sous espace pondéré (algorithme 5) proposé dans le chapitre 4 comparé à la borne AMV construite à partir de $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$. Notons que cet algorithme est asymptotiquement efficace dans le cas particulier d'une seule source de non circularité quelconque.

Pour illustrer l'information contenue dans la seconde matrice de covariance dans le cas d'estimation de paramètres des réponses impulsionnelles de canaux SIMO et SISO, Kristensson et *al* proposent un algorithme SF construit à partir du vecteur d'observation du modèle étendu où des améliorations des performances asymptotiques ont été uniquement observées par des simulations.

Par suite, la question suivante s'impose également : existait-il un estimateur basé sur $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ dont les performances asymptotiques approchent celle de l'estimateur AMV basé sur $\mathbf{R}_{y,T}$ et $\mathbf{R}'_{y,T}$?

Une solution aux deux problèmes mentionnés ci-dessus consiste à utiliser la notion de l'estimateur AMV basé respectivement sur les matrices hermitiennes de projecteurs estimés $(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ ou $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$. Nous rappelons que la mise en oeuvre de l'estimateur AMV nécessite que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. l'estimateur considéré comme une fonctionnelle qui à une statistique associe une estimée, doit être différentiable au sens complexe.
2. la première matrice de covariance asymptotique $\mathbf{C}_s$ de la statistique doit être régulière.

Puisque ces statistiques sont hermitiennes, ces estimateurs sont en général des applications complexes différentiables au sens complexe par rapport à $(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ [resp. $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$] au point $(\mathbf{\Pi}_y, \mathbf{\Pi}'_y)$ [resp. $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$]. Cependant, la seconde condition n'est pas satisfaite pour les statistiques $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ et $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$. Le paragraphe suivant va étendre les résultats classiques d'estimateur AMV au cas où la première matrice de covariance de la loi asymptotique d'une statistique générale est singulière.

7.3 Estimateurs AMV dans le cas singulier

7.3.1 Statistique arbitraire

Considérons une suite de statistiques réelles ou complexes $\mathbf{s}_T$ de dimension $N \times 1$ qui est un estimateur consistant de $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ pour lequel le paramètre réel $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^K$ est identifiable à partir de $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$. Nous supposons que la statistique $\mathbf{s}_T$ est centrée asymptotiquement gaussienne dont la première matrice de covariance $\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})$ est singulière. Nous notons $\mathbf{C}'_s(\boldsymbol{\theta})$ la seconde matrice de covariance de la loi asymptotique de $\mathbf{s}_T$.

$$\sqrt{T}\ (\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_c\left(\mathbf{0}; \mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{C}'_s(\boldsymbol{\theta})\right).$$

Pour déterminer les performances asymptotiques d'un algorithme d'estimation de $\boldsymbol{\theta}$ basé sur la statistique $\mathbf{s}_T$, dont la première matrice de covariance est singulière, nous adoptons une analyse fonctionnelle (cf. chapitre 4) qui consiste à considérer tout algorithme qui fournit une estimée $\boldsymbol{\theta}_T$ de $\boldsymbol{\theta}$ comme une relation fonctionnelle entre cette estimée $\boldsymbol{\theta}_T$ et la statistique $\mathbf{s}_T$ dont elle est déduite telle que $\mathbf{s}_T \longmapsto \boldsymbol{\theta}_T = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}_T)$ où la fonctionnelle $\mathrm{Alg}(.)$ est différentiable par rapport à $(\Re(\mathbf{s}), \Im(\mathbf{s}))$ au point $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$. Sous ces hypothèses, nous prouvons en annexe 1 le résultat suivant :

Résultat 7.1 *La matrice de covariance asymptotique d'un estimateur $\boldsymbol{\theta}_T$ donné par un algorithme arbitraire basé sur $\mathbf{s}_T$ est bornée inférieurement par la matrice réelle symétrique $\left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1}$:*

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}} \geq \mathbf{C}^{\mathrm{AMV(s)}}(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1}, \tag{7.3.1}$$

si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\mathrm{Imag}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Imag}(\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})) \quad et \quad \mathbf{s}_T^* = \mathbf{P}\mathbf{s}_T, \tag{7.3.2}$$

où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation arbitraire et $\mathcal{S} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}$.

Remarque 7.1

1. La seconde condition donnée par (7.3.2) est vérifiée pour des statistiques constituées par les termes de matrices hermitiennes. Cependant, pour des statistiques constituées par les termes de matrices complexes symétriques, les termes complexes conjugués doivent être additionnés de telle sorte que l'application soit différentiable au sens complexe.

2. Dans le cas particulier où $\frac{1}{T}\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})$ représente la matrice de covariance asymptotique de la statistique $\mathbf{s}_T$ pour tout T, la condition $\mathrm{Rang}(\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})) = r \leq N$ est équivalente à l'existence d'au plus $N - r$ relations linéaires indépendantes entre composantes de $\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ traduites par l'existence d'une matrice $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}}$ de dimension $N \times r$, de rang r telle que $\mathbf{s}_T = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}'_T$ où $\mathrm{Cov}(\mathbf{s}'_T)$ est non singulière. Par suite $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}'(\boldsymbol{\theta})$. Dans le cas trivial où ces relations linéaires ne dépendent pas de $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{B}$ ne dépend pas de $\boldsymbol{\theta}$ et $\mathcal{S} = \mathbf{B}\mathcal{S}'$ où $\mathcal{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{s}'(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}$, par suite $\mathrm{Imag}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Imag}(\mathbf{B})$ et puisque $\mathrm{Imag}(\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})) = \mathrm{Imag}(\mathbf{B})$, la première condition (7.3.2) est donc vérifiée.

Le résultat précédent fournit donc une borne inférieure sur la matrice de covariance asymptotique du paramètre estimé $\boldsymbol{\theta}_T$ dans le cas où la matrice de covariance de la statistique est singulière. Il reste à savoir s'il existe des estimateurs dont la première matrice de covariance asymptotique est égale à cette borne, et qui par la suite seraient asymptotiquement de variance minimale. Nous démontrons dans l'annexe 2 le résultat suivant :

Résultat 7.2 *L'estimateur basé sur* $\mathbf{s}_T$

$$\boldsymbol{\theta}_T = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}^K} [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)]^H \mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)[\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)]. \tag{7.3.3}$$

est asymptotiquement de variance minimale.

7.3.2 Application aux projecteurs

Dans cette section nous nous concentrons sur les propriétés générales d'algorithmes AMV associés au modèle générique décrit par le vecteur $\mathbf{y}_t \in \mathbb{C}^M$ d'observation stationnaire au sens large suivant :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{7.3.4}$$

où $(\mathbf{y}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont indépendantes ou non, $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont centrés et indépendants entre eux dans $\mathbb{C}^M$, $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont supposés gaussiens complexes circulaires, indépendants entre eux, spatialement non corrélés avec $\mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$. $(\mathbf{x}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont complexes non circulaires, pas nécessairement gaussiens, ni indépendants. Nous supposons que $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$ sont non singulières aussi que $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})) = L < M$ et le vecteur des paramètres réels $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^K$ est identifiable uniquement à partir du sous espace engendré par les colonnes de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$. Par conséquent, le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ est identifiable uniquement à partir du projecteur orthogonal commun $\mathbf{\Pi}_y$ sur le sous espace bruit associé à

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_s + \sigma_n^2\mathbf{I},$$

ou associé à

$$\mathbf{R}'_y = \mathbf{A}\mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}'_s \neq \mathbf{O}.$$

Le vecteur d'observation $2M \times 1$ du modèle général étendu est :

$$\tilde{\mathbf{y}}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{y}_t^T, \mathbf{y}_t{}^H)^T \text{ avec } \mathbf{R}_{\tilde{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}_t\tilde{\mathbf{y}}_t^H) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{s}} + \sigma_n^2\mathbf{I},$$

et nous supposons ici que $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ est aussi non singulière. Par conséquent, le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ est également identifiable à partir du projecteur orthogonal $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ associé au sous espace bruit de la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$.
Dans la suite nous considérons les projecteurs orthogonaux estimés suivants $\mathbf{\Pi}_{y,T}$, $\mathbf{\Pi}'_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ associés aux sous espaces bruit des matrices de covariance empiriques $\mathbf{R}_{y,T}$, $\mathbf{R}'_{y,T}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$, respectivement. Notons que les expressions des matrices de covariance asymptotiques $\mathbf{C}_{\Pi}$, $\mathbf{C}_{\Pi'}$ et $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ associées respectivement à $\mathbf{s}_T = \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$, $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}'_{y,T})$ et $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$, prouvées dans le chapitre 4 avec des observations indépendantes restent valables ici. Ces expressions sont données par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\Pi} &= (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}) + (\mathbf{U}^* \otimes \mathbf{\Pi}_y) && (7.3.5)\\
\mathbf{C}_{\Pi'} &= (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}') + (\mathbf{U}'^* \otimes \mathbf{\Pi}_y) \\
\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} &= (\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}))\left((\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{U}}) + (\tilde{\mathbf{U}}^* \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})\right). && (7.3.6)
\end{aligned}$$

Nous démontrons dans l'annexe 3, le résultat suivant :

Résultat 7.3 *Pour des observations indépendantes, la matrice de covariance asymptotique* $\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}$ *de la statistique* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\Pi} & \mathbf{C}_{\Pi,\Pi'} \\ \mathbf{C}_{\Pi,\Pi'}^H & \mathbf{C}_{\Pi'} \end{pmatrix} && (7.3.7)\\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y^* \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{U}''^* \\ \mathbf{U}''^T & \mathbf{U}'^* \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y.
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{U}' \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_n^2 \mathbf{R}_s'^{*\#} \mathbf{R}_y^* \mathbf{R}_s'^{\#}$ *et* $\mathbf{U}'' \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_n^2 \mathbf{R}_s^{\#} \mathbf{R}'_y \mathbf{R}_s'^{\#}$.

Remarque 7.2
Nous notons que les matrices de covariance $\mathbf{C}_{\Pi}$, $\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}$ et $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$, ne dépendent pas des moments d'ordre quatre et de la corrélation temporelle de signaux sources $\mathbf{x}_t$. Par conséquent, les performances asymptotiques d'algorithmes sous espaces arbitraires construits à partir de $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ ou $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$ dépendent seulement de la distribution de $\mathbf{x}_t$ à travers ces moments d'ordre 2 définissant les deux matrices $\mathbf{R}_x$ et $\mathbf{R}'_x$. De plus, la performance asymptotique de l'algorithme sous espace construit à partir de $\mathbf{R}_{y,T}$ ne dépend seulement que de la première matrice de covariance $\mathbf{R}_x$.

Nous démontrons dans l'annexe 4 le résultat suivant :

Résultat 7.4 *Les matrices de covariance asymptotiques* $\mathbf{C}_s$ *associées à chaque statistique* $\mathbf{s}_T = \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$, $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ *et* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$ *sont singulières.*

Cependant, en vertu des résultats 7.1 et 7.2, nous démontrons dans l'annexe 5 le résultat suivant :

Résultat 7.5 *La matrice de covariance* $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ *de la distribution asymptotique d'un estimateur de* $\boldsymbol{\theta}$ *donné par un algorithme de sous espace arbitraire basé sur les statistiques* $\mathbf{\Pi}_{y,T}$, $(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi'}_{y,T})$ *ou* $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ *est bornée inférieurement par la matrice réelle symétrique* $\left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#} \mathcal{S}\right)^{-1}$ *avec* $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}$ *où* $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ *est respectivement* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y)$, $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y, \mathbf{\Pi'}_y)$ *ou* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})$.
De plus, l'estimateur sous espace des moindres carrés non linéaire suivant est asymptotiquement de variance minimale :

$$\boldsymbol{\theta}_T = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^K} [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)]^H \mathbf{W}_T [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)] \tag{7.3.8}$$

où $\mathbf{W}_T$ *est un estimateur consistant de* $\mathbf{C}_s^{\#}$ *construit respectivement à partir des statistiques* $\mathbf{R}_{y,T}$, $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R'}_{y,T})$ *ou* $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$.

Notons que des estimées consistantes de $\mathbf{C}_{\Pi}^{\#}$, $\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}^{\#}$ et $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}^{\#}$ sont déduites à partir des estimées consistantes de σ_n^2, $\mathbf{\Pi}_y$, $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$, $\mathbf{R}_s$, $\mathbf{R'}_s$, $\mathbf{R}_{\tilde{s}}$, en utilisant la décomposition en valeur singulière respectives de $\mathbf{R}_{y,T}$, $\mathbf{R'}_{y,T}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y},T}$.

7.3.3 Comparaisons avec les travaux génériques existants

Parmi les résultats théoriques qui existent sur l'étude de performances statistiques d'algorithmes sous espaces, on trouve la généralisation de Cardoso et Moulines [10] de l'algorithme optimal WSF introduit par Viberg [69, 66] dans le contexte d'estimation des paramètres de DOA de signaux sources gaussiens circulaires. Dans cet article Cardoso *et al.* démontrent quelques propriétés d'invariance d'estimateurs de type WSF ainsi que l'équivalence asymptotique entre l'algorithme WSF et l'algorithme SM sous certaines conditions de régularités. Nous notons que la borne inférieure dérivée dans [10, rel. (42)] est égale à la borne donnée par l'égalité (7.3.1) appliqué à la statistique $\mathbf{\Pi}_{y,T}$. Nous démontrons en annexe 6, que les deux premières conditions [10, Assumption 1 et Assumption 2] sous lesquelles a été dérivée la borne [10, rel. (42)] à savoir l'identifiable de $\boldsymbol{\theta}$ à partir $\mathbf{\Pi}_y$ ou à partir de $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ et la gaussienneté des statistiques $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ et $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ sont équivalentes à nos conditions introduites dans la section 7.3.1.

Remarque 7.3
Nous notons que les conditions (7.3.2) et [10, Assumption 1 et Assumption 2] équivalentes sont satisfaites *sans nos hypothèses* par les statistiques $\mathbf{\Pi}_{y,T}$, $(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$ et $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$. Mais dans des hypothèses plus générales par exemple pour $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ non indépendants, la condition (7.3.2) n'est pas forcement satisfaite. En effet, dans ce cas les expressions (7.3.5) de $\mathbf{C}_{\Pi}$ et (7.3.6) de $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ sont plus complexes. Par exemple, la relation $\mathbf{C}_{\Pi} = \mathbf{D}_{\Pi,R} \mathbf{C}_R \mathbf{D}_{\Pi,R}^H$ où $\mathbf{D}_{\Pi,R}$ désigne la matrice Jacobienne de l'application $\mathbf{R}_{y,T} \longmapsto \mathbf{\Pi}_{y,T}$, n'implique plus $\mathrm{Imag}(\mathbf{C}_{\Pi}) = \mathrm{Imag}(\mathbf{D}_{\Pi,R})$ si $\mathbf{C}_R$ est singulière. Ce qui est le cas pour $\mathbf{y}_t = (y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-M})$ avec y_t processus stationnaire du second ordre. En effet, dans ce cas les matrice de covariance asymptotiques de la covariance empirique $\mathbf{R}_{y,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^H$ est la même que celle de la covariance empirique Toeplitzée (par moyennage sur les parallèles à la diagonale principale) $\mathbf{R}_{y,T}^{\text{Toeplitz}}$ [24] qui est bien sûre singulière.

7.4 Efficacité des estimateurs AMV dans le cas gaussien

Pour évaluer l'efficacité des estimateurs AMV construits à partir de divers projecteurs empiriques donnés par le résultat 7.5, nous considérons le modèle de DOA présenté dans le chapitre 4, puis nous étendons ces résultats au cas du modèle plus général décrit en début de section 7.3.2.

7.4.1 Modèle d'estimation de DOA

Nous rappelons que des expressions explicites de la CRB stochastique du paramètre de DOA seul de signaux sources gaussiens complexes circulaires et non circulaires sont données respectivement dans le chapitre 5 par les égalités (5.6.18) et (5.6.17) où la matrice $\mathbf{A}$ est supposée de rang plein colonne ($L = K < M$). Pour évaluer l'efficacité d'algorithmes donnés par le résultat 7.5 construits à partir des trois statistiques dans le cas particulier d'estimation du paramètre de DOA, nous comparons les matrices de covariance asymptotiques des DOA estimées associées à ces trois estimateurs avec la CRB gaussienne complexe circulaire ou non circulaire. Le résultat suivant est démontré en annexe 7 :

Résultat 7.6 *En absence de connaissances a priori supplémentaires sur les signaux sources gaussiennes, les bornes AMV associées aux statistiques* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$*, [resp.* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi'}_{y,T})$ *et* $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$*] sont égales à la CRB stochastique normalisée (i.e.* $T = 1$*) associée à la distribution gaussienne complexe circulaire [resp. non circulaire].*

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\mathbf{H}^T\right]\right\}^{-1} \\
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\left(\mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}\mathbf{D}\right)\odot\mathbf{H}_1^T\right]\right\}^{-1} \\
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_x$ *et* $\mathbf{H}_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^*\end{bmatrix}$.

Par conséquent, il existe toujours des estimateurs des moindres carrés non linéaires (7.3.8) *asymptotiquement efficaces sous l'hypothèse de signaux sources gaussiens appliqués à l'estimation du paramètre de DOA.*

Remarque 7.4

1. Notons que ces égalités ne sont plus valides si certaines connaissances a priori sur les signaux sources sont disponibles (par exemple, non corrélation, taux de non circularité maximale, non corrélation et taux de non circularité maximale) comme nous l'avons montré dans le chapitre 4 à travers l'étude de la borne AMV sous connaissance a priori.

2. Puisque les estimateurs AMV basés seulement sur $\mathbf{R}_{y,T}$ ou sur $(\mathbf{R}_{y,T}, \mathbf{R}'_{y,T})$ sans connaissance a priori sur les signaux sources, sont asymptotiquement efficaces [67, 22], nous déduisons à partir du résultat 7.6 pour les CRB normalisées :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R)}(\boldsymbol{\theta}) \\
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(R,R')}(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

Remarque 7.5
Notons que le résultat 7.6 démontré dans le cas où chaque vecteur directionnel $\mathbf{a}_k$ est paramétré par un paramètre réel scalaire θ_k, peut être étendu facilement au cas général où chaque vecteur directionnel $\mathbf{a}_k$ de $\mathbf{A}$ est paramétré par q paramètres réels (par exemple, azimut, élévation, distance ...), i.e., $\boldsymbol{\theta}_k \in \mathbb{R}^q$. Dans ce cas, les expressions des CRB gaussiennes complexes circulaires et non circulaires données respectivement dans le chapitre 5 par (5.6.18) et (5.6.17) peuvent être étendues respectivement sous les formes suivantes en utilisant les deux égalités générales (7.5.28) et (7.5.36)

$$\begin{aligned}
\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_y\mathbf{D}\odot\left(\mathbf{H}^T\otimes\mathbf{1}\right)\right]\right\}^{-1} \\
\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\mathbf{D}^H\boldsymbol{\Pi}_y\mathbf{D}\odot\left(\mathbf{H}_1^T\otimes\mathbf{1}\right)\right]\right\}^{-1},
\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}$ est une matrice $q \times q$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et où le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ et la matrice $\mathbf{D}$ sont donnés respectivement par $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \phi_1|, ..., |\theta_K, ..., \phi_K)^T$ et $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d\mathbf{a}_1(\theta_1,...,\phi_1)}{d\theta_1}, ..., \frac{d\mathbf{a}_1(\theta_1,...,\phi_1)}{d\phi_1}, ..., \frac{d\mathbf{a}_K(\theta_K,...,\phi_K)}{d\theta_K}, ..., \frac{d\mathbf{a}_K(\theta_K,...,\phi_K)}{d\phi_K}\right]$.

7.4.2 Modèle paramétrique général

Dans le cas du modèle général décrit par l'égalité (7.3.4) paramétré par le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ arbitraire réel, le résultat 7.6 s'étend sous la forme suivante démontré en annexe 8 :

Résultat 7.7 *Si les signaux* $\mathbf{x}_t$ *sont gaussiens et indépendants, les bornes AMV associées aux statistiques* $\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Pi}_{y,T})$*, [resp.* $\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Pi}_{y,T}, \boldsymbol{\Pi}'_{y,T})$ *et* $\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y},T})$*] sont égales à la CRB stochastique normalisée associée à la distribution gaussienne complexe circulaire [resp. non circulaire].*

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\frac{d^H\mathrm{vec}(\mathbf{A})}{\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{H}^T\otimes\boldsymbol{\Pi}_y\right)\frac{d\mathrm{vec}(\mathbf{A})}{d\boldsymbol{\theta}}\right]\right\}^{-1} && (7.4.9) \\
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2}\left\{\Re\left[\frac{d^H\mathrm{vec}(\mathbf{A})}{d\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{H}_1^T\otimes\boldsymbol{\Pi}_y\right)\frac{d\mathrm{vec}(\mathbf{A})}{d\boldsymbol{\theta}}\right]\right\}^{-1} && (7.4.10) \\
\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{CRB}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe toujours des estimateurs des moindres carrés non linéaires (7.3.8) *qui sont asymptotiquement efficaces sous l'hypothèse de signaux gaussiens.*

Exemple d'illustration

Nous considérons le problème d'estimation du paramètre de réponses impulsionnelles du canal bruité SISO d'ordre M présenté dans [51], puis dans [23]. Le signal en bande de base reçu à l'instant t est donné par :

$$y_t = \sum_{k=0}^{M} h_k x_{t-k} + n_t,$$

avec $(h_k)_{k=0,\dots,M}$ réponse impulsionnelle complexe du canal. n_t est un bruit additif blanc gaussien complexe circulaire au second ordre avec $\mathrm{E}(n_t n_t^H) = \sigma_n^2$. x_t est la suite des symboles transmis qui est stationnaire ou cyclostationnaire. Nous supposons que x_t et n_t sont statistiquement indépendants. Avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_t &\stackrel{\text{def}}{=} (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-M})^T \\
\mathbf{x}_t &\stackrel{\text{def}}{=} (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-2M})^T \\
\mathbf{n}_t &\stackrel{\text{def}}{=} (n_t, n_{t-1}, \dots, n_{t-M})^T,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t, \tag{7.4.11}$$

avec $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice Toeplitz de filtrage donnée par :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} h_0 & \cdots & \cdots & h_M & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & h_0 & \cdots & \cdots & h_M \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad h_0 = 1.$$

Dans ce cas, $\boldsymbol{\theta} = (\Re(h_1), ..\Re(h_M), Im(h_1), .., Im(h_M))^T \in \mathbb{R}^K$, avec $K = 2M$. Dans la suite, nous distinguons les deux cas suivants où la suite x_t des symboles transmis peut être la modulation BPSK ou la MSK.

Modulation BPSK

Dans ce cas, les variables aléatoires x_t sont indépendantes prenant des valeurs dans l'ensemble $\{+1, -1\}$ avec des probabilités égales. En considérant le vecteur d'observation du modèle étendu $\tilde{\mathbf{y}}_t$, nous obtenons à partir de l'égalité (7.4.11) :

$$\tilde{\mathbf{y}}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{n}}_t, \tag{7.4.12}$$

et

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I}.$$

Notons que ce vecteur peut être interprété comme un vecteur d'observation associé au canal SIMO avec deux sorties. Cependant, les résultats [64, 1] obtenus sur l'identifabilité du paramètre du canal SIMO peuvent être appliqués. Le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ n'est pas identifiable à partir de la première matrice de covariance $\mathbf{R}_y$ seule et par conséquent non plus à partir

du projecteur orthogonal associé $\mathbf{\Pi}_y$. Cependant, avec la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$, le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ est identifiable [51] à partir du sous espace engendré par les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$ si et seulement si le polynôme $h(z) = \sum_{k=0}^{M} h_k z^k$ ne possède pas de zéros réels et de zéros conjugués.

Modulation MSK

Dans ce cas, les variables aléatoires x_t sont définies par $x_t = i^t b_t x_0$ où la valeur initiale x_0 reste inconnue dans l'ensemble $\{+1, +i, -1, -i\}$ et où b_t est une autre séquence de symboles BPSK indépendants prenant des valeurs dans l'ensemble $\{-1, +1\}$ avec des probabilités égales. Nous notons que dans ce cas, la suite x_t (ainsi que y_t) est cyclostationnaire au second ordre. Cependant, avec l'opération simple de rotation[1] en définissant $y'_t \stackrel{\text{def}}{=} y_t i^{-t}$, nous obtenons :

$$y'_t \stackrel{\text{def}}{=} y_t i^{-t} = \sum_{k=0}^{M} h'_k b_{t-k} + n'_t,$$

avec $h'_k \stackrel{\text{def}}{=} x_0 h_k i^{-k}, k = 0, \ldots, M$ et où $n'_t \stackrel{\text{def}}{=} i^{-t} n_t$ est reste stationnaire au second ordre. Avec cette modulation, la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ prend la forme similaire suivante :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\tilde{\mathbf{y}}'_t \tilde{\mathbf{y}}'^H_t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}') \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}') & \mathbf{A}^T(\boldsymbol{\theta}') \end{pmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I},$$

où $\boldsymbol{\theta}' = (\Re(h'_1), ..\Re(h'_M), Im(h'_1), .., Im(h'_M))^T$. Par conséquent, l'explication que nous avons dis dans le cas de la modulation BPSK reste valable puisque $h'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{M} h'_k z^k = x_0 \sum_{k=0}^{M} h_k (i^{-1} z)^k$. Par suite avec la nouvelle matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{y}'}$, le paramètre $\boldsymbol{\theta}'$ est identifiable à partir du sous espace engendré par les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}') \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}') \end{pmatrix}$ si et seulement si le polynôme $h(z) = \sum_{k=0}^{M} h_k z^k$ ne possède pas de zéros réels et de zéros conjugués sous la forme (iz_0, iz_0^*), $z_0 \in \mathbb{C}$ [23].

En ce qui concerne l'étude de performance, notons que l'étude précédente ne s'applique que pour $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ indépendants, soit pour des observations successives $\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t+M}, \ldots, \mathbf{y}_{t+(T-1)M}$. Dans le cas d'observations $(\mathbf{y}_t)_{t=1,\ldots,T}$, les vecteurs $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ ne sont plus indépendants. Cela implique une expression plus compliquée de $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ [24]. Par suite l'expression (7.4.9) dans laquelle on a remplacé $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ par $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R}_y$ par $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ (cf. modèle (7.4.12)), n'est valide que dans le cas d'observations $\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t+M}, \ldots, \mathbf{y}_{t+(T-1)M}$, en temps que borne AMV.

Comparaisons numériques

Les figures 7.1 et 7.2 illustrent le canal $h(z) = (1 - z_1^{-1} z)(1 - z_2^{-1} z)$ avec $z_1 = 0.8 e^{i\alpha}$ et $z_2 = 1.25 e^{i\pi/4}$ où α varie de 0 à $\pi/2$. Nous représentons le MSE($\mathbf{h}$)=Tr($\mathbf{C}^{\text{AMV}}(\mathbf{h})$ normalisé avec $\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\theta}$ sous deux hypothèses : le cas d'observations indépendantes où l'expression (7.4.9)

[1] Dans [51], cette opération de rotation est effectuée sur le vecteur $\mathbf{y}_t$ et par conséquence $\mathbf{y}'_t = \mathbf{y}_t i^{-t}$ devient stationnaire au second ordre.

s'applique et le cas d'observations non indépendantes où on applique la relation (7.3.1) avec $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}})$ et

$$\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = (\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}})\mathbf{C}_{R_{\tilde{y}}}(\boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{\#} + \tilde{\mathbf{S}}^{\#*} \otimes \boldsymbol{\Pi}_{\tilde{y}})^H,$$

où $\mathbf{C}_{R_{\tilde{y}}}$ est donnée dans [24]. Nous observons que ces deux MSE augmentent dramatiquement quand le zéro z_1, approche l'axe réel (cas BPSK) ou l'axe imaginaire (cas MSK) pour lequel le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ devient non identifiable. Ce comportement est expliqué par l'égalité (7.4.9) dans le cas d'observations indépendantes pour laquelle la matrice de filtrage étendue $\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$ devient à rang déficient.

Notons que les performances obtenues sous les deux hypothèses d'observation $\mathbf{y}_t$ sont voisines mais aucune des deux bornes AMV n'est uniformément meilleure que l'autre.

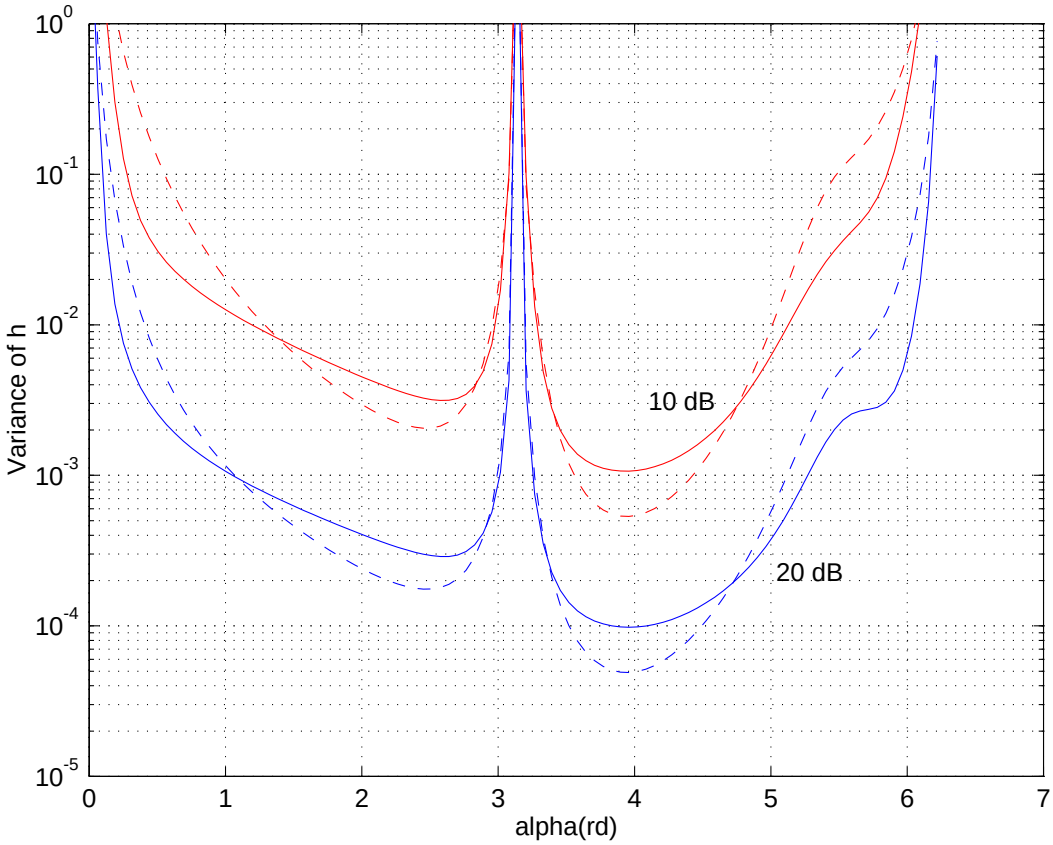

FIG. 7.1 – MSE($\mathbf{h}$)=Tr($\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}}(\mathbf{h})$) normalisé associé à la modulation BPSK en fonction de la phase α de la racine z_1 pour SNR= $10dB$ et $20dB$ sous deux modèles d'observations indépendantes $(--)$ et non indépendantes $(-)$.

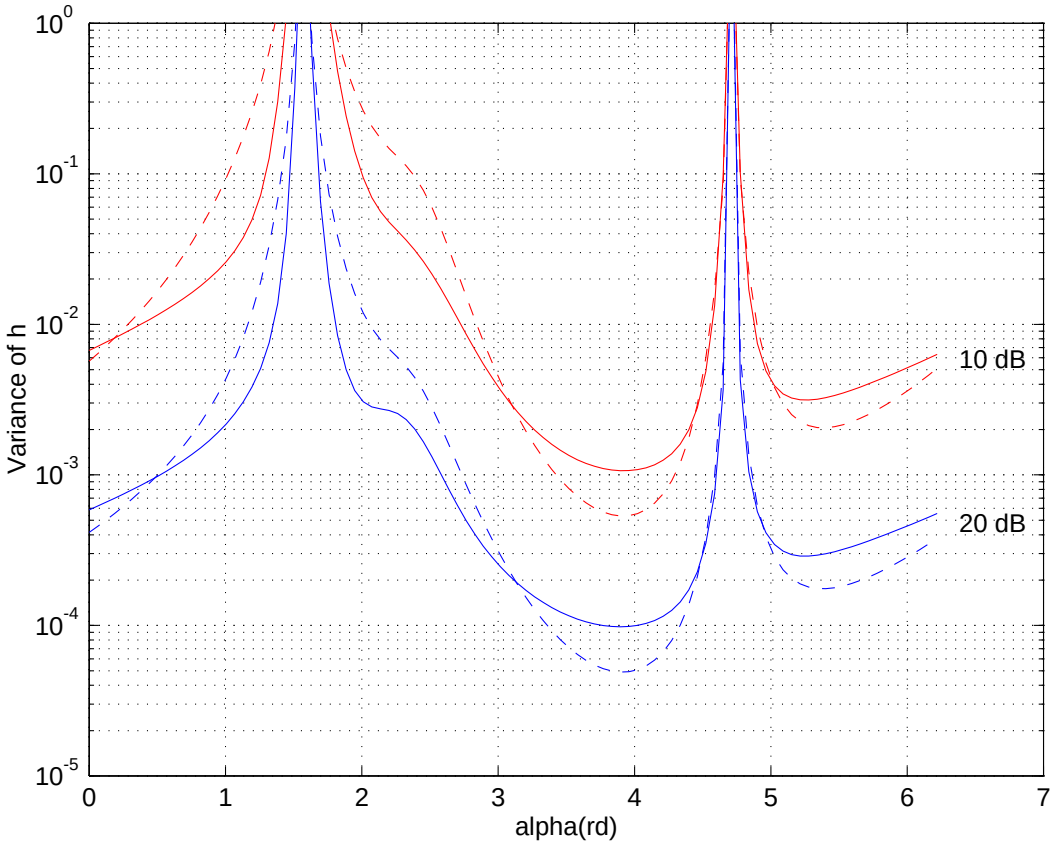

FIG. 7.2 – MSE($\mathbf{h}$)=Tr($\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}}(\mathbf{h})$) normalisé associé à la modulation MSK en fonction de la phase α de la racine z_1 pour SNR= $10dB$ et $20dB$ sous deux modèles d'observations indépendantes trait $(--)$ et non indépendantes $(-)$.

7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu l'approche AMV standard à des statistiques dont la première matrice de covariance de sa distribution asymptotique est singulière. Cet estimateur a été appliqué à plusieurs projecteurs empiriques dont des expressions de la première matrice de covariance asymptotique sont démontrées ainsi que des expressions explicites des bornes AMV associées à ces statistiques. Dans le cas du modèle d'estimation de DOA de signaux sources gaussiens complexes circulaires ou non, et en absence de connaissances a priori supplémentaires sur les signaux sources, nous avons démontré grâce à des résultats algébriques que ces bornes AMV sont égales à la CRB stochastique gaussienne. Ces résultats sont ensuite étendus au cas des paramètres multiples par source. En conséquence, il existe toujours des estimateurs sous espaces de recherche multidimensionnelle d'estimation de DOA dans le contexte gaussien qui sont asymptotiquement efficaces. Nous avons également étendu ces résultats au cas de modèles paramétriques plus généraux, $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$. Nous avons enfin illustré cette borne AMV dans le cas d'estimation de réponses impulsionnelles du canal SISO.

Annexes

Annexe 1 : Preuve du Résultat 7.1

Puisque $\boldsymbol{\theta}_T = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}_T)$ est un estimateur de $\boldsymbol{\theta}$ supposé différentiable, nous avons

$$\mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{s}) = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})) + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{D}_s^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{s} \\ \delta\mathbf{s}^* \end{bmatrix} + o(\delta\mathbf{s}), \tag{7.5.13}$$

puisque $\mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})) = \boldsymbol{\theta}$ et $\mathbf{s}^*(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ donnée par la seconde condition, l'égalité (7.5.13) devient

$$\mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{s}) = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\delta\mathbf{s} + o(\delta\mathbf{s}),$$

avec $\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}_s + \mathbf{D}_s^*\mathbf{P}$ matrice Jacobienne de l'application Alg(.). Nous pouvons écrire également

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta} &= \mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})) = \mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta} + o(\delta\boldsymbol{\theta})) \\ &= \mathrm{Alg}(\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})) + \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta} + o(\delta\boldsymbol{\theta}) \\ &= \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta} + o(\delta\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

on en déduit que $\mathcal{S}$ est l'inverse à droite de $\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}$,

$$\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathcal{S} = \mathbf{I}. \tag{7.5.14}$$

Ceci implique que $\mathrm{Rang}(\mathcal{S}) = K$. Et puisque $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}}\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}})^H$ avec $\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})$ singulière, la preuve du résultat se ramène donc au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{D}\mathcal{S}=\mathbf{I}} \mathbf{D}\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})\mathbf{D}^H. \tag{7.5.15}$$

Notons par $r = \mathrm{Rang}(\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}))$, et grâce à la SVD de $\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})$, il existe une matrice $\mathbf{U}$ unitaire $N \times r$ avec $r < N$ telle que $\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U}^H$. La condition $\mathrm{Imag}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Imag}(\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}))$ implique qu'il existe une matrice $\mathcal{S}'$ de dimension $r \times K$ telle que $\mathcal{S} = \mathbf{U}\mathcal{S}'$. Et par conséquent, le problème d'optimisation (7.5.15) se ramène au nouveau problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{D}'\mathcal{S}'=\mathbf{I}} \mathbf{D}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'^H \text{ où } \mathbf{D}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}\mathbf{U},$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}$ une matrice non singulière. En vertu du lemme [82, lemma 3.1, p. 80], la solution minimale est donnée classiquement par :

$$(\mathcal{S}'^H\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathcal{S}')^{-1} = (\mathcal{S}'^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathcal{S}')^{-1} = \left(\mathcal{S}^H\mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1}.$$

Annexe 2 : Preuve du Résultat 7.2

Soient $\delta\boldsymbol{\theta}_T$ et $\delta\mathbf{s}_T$ des perturbations due à l'estimation à partir d'un nombre fini T d'observations telles que $\boldsymbol{\theta}_T = \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}_T$ et $\mathbf{s}_T = \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{s}_T$ avec, $\delta\mathbf{s}_T$ structurée. On définit $V(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{s}(\alpha)]^H \mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)[\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{s}(\alpha)]$ et $V_T(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)]^H \mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)[\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\alpha)]$. Puisque $\boldsymbol{\theta}_T$ est un minimum local de $V_T(\alpha)$, nous obtenons pour $k = 1, \ldots, K$, $\frac{dV_T(\alpha)}{d\alpha_k}_{|\alpha=\boldsymbol{\theta}+\delta\boldsymbol{\theta}_T} = \mathbf{0}$ avec $\frac{dV(\alpha)}{d\alpha_k}_{|\alpha=\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$. En développant cette première dérivée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} - & \frac{d\mathbf{s}^H(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}_T)[\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)] - [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)]^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}_T) \frac{d\mathbf{s}^H(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} \\ + & [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)]^H \frac{d\mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T}[\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)] = 0, \end{aligned} \tag{7.5.16}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T) &= (\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{s}_T) - (\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta}_T + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T)) \\ &= \delta\mathbf{s}_T - \mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta}_T + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T). \end{aligned}$$

Grâce à des développements limités à l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} &= \frac{d\mathbf{s}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}} + \sum_{l=1}^{K} \frac{d^2\mathbf{s}(\alpha)}{d\alpha_l d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}} \delta\alpha_l + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T) \\ \frac{d\mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} &= \frac{d\mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}} + \sum_{l=1}^{K} \frac{d^2\mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)}{d\alpha_l d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}} \delta\alpha_l + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T) \\ \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T) &= \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{S}\delta\boldsymbol{\theta}_T + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T) \\ \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}_T) &= \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{l=1}^{K} \frac{d\mathbf{C}_s^{\#}(\alpha)}{d\alpha_l}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}} \delta\alpha_l + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T). \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (7.5.16), et après simplification, on obtient :

$$\left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S} + \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})^* \mathcal{S}^*\right) \delta\boldsymbol{\theta}_T + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T) = \mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\delta\mathbf{s}_T + \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})^* \delta\mathbf{s}_T^* + o(\delta\mathbf{s}_T).$$

Par conséquent, l'algorithme (7.3.3) satisfait :

$$\begin{aligned} \text{Alg}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{s}_T] &= \boldsymbol{\theta} + \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S} + \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#*}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}^*\right)^{-1} \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}), \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#*}(\boldsymbol{\theta})\right) \begin{pmatrix} \delta\mathbf{s}_T \\ \delta\mathbf{s}_T^* \end{pmatrix} \\ &+ o(\delta\mathbf{s}_T) = \boldsymbol{\theta} + \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1} \mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\delta\mathbf{s}_T + o(\delta\mathbf{s}_T), \end{aligned} \tag{7.5.17}$$

où la seconde égalité est obtenue en utilisant le fait que $\mathcal{S}^* = \mathbf{P}\mathcal{S}$ et $\mathbf{C}_s^T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}_s^*(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})\mathbf{P}$. On en déduit que $\mathbf{D}_s^{\text{alg}} = \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}\right)^{-1} \mathcal{S}^H \mathbf{C}_s{}^{\#}(\boldsymbol{\theta})$ et donc

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{D}_s^{\text{alg}} \mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{D}_s^{\text{Alg}})^H = (\mathbf{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S})^{-1}.$$

Annexe 3 : Preuve du Résultat 7.3

En utilisant les perturbations suivantes démontrées dans l'annexe 1 du chapitre 4

$$\begin{aligned}
\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}_{y,T}) &= -((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{R}_s^{\#}) + (\mathbf{R}_s^{*\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y))\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T}) + o(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T})) \\
\mathrm{vec}(\delta\mathbf{\Pi}'_{y,T}) &= -(\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{R}_s^{'*\#})\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T}^{'*}) - (\mathbf{R}_s^{'\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y)\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T}^{'}) + o(\mathrm{vec}(\delta\mathbf{R}_{y,T}^{'})),
\end{aligned}$$

grâce au théorème de continuité 4.2, on obtient la matrice de covariance croisée

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\Pi,\Pi'} &= ((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{R}_s^{\#}) + (\mathbf{R}_s^{*\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y))\mathbf{C}_{r_y,r_y'}(\mathbf{R}_s^{'*\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y) && (7.5.18) \\
&+ ((\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{R}_s^{\#}) + (\mathbf{R}_s^{*\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y))\mathbf{C}'_{r_y,r_y'}(\mathbf{\Pi}_y \otimes \mathbf{R}_s^{\#}), && (7.5.19)
\end{aligned}$$

où les expressions suivantes sont données dans le chapitre 4

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{r_y,r_y'} &= \mathbf{K}(\mathbf{R}_y \otimes \mathbf{R}'^*_y) + \mathbf{R}'^*_y \otimes \mathbf{R}_y + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}_x^{''}(\mathbf{A}^H \otimes \mathbf{A}^H) \\
\mathbf{C}'_{r_y,r_y'} &= \mathbf{K}(\mathbf{R}'_y \otimes \mathbf{R}^*_y) + \mathbf{R}^*_y \otimes \mathbf{R}'_y + (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}_x^{''}(\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}^T).
\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (7.5.18), et en utilisant l'identité $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{A} = \mathbf{O}$, les trois derniers termes de $\mathbf{C}_{r_y,r_y'}$ et $\mathbf{C}_{r_y,r_y'}$ disparaissent, ensuite puisque $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{R}'_y = \mathbf{O}$ et $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{R}_s^{'*\#} = \mathbf{O}$, l'expression (7.5.18) se simplifie après des manipulations algébriques simples et on trouve

$$\mathbf{C}_{\Pi,\Pi'} = (\mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}'') + (\mathbf{U}''^* \otimes \mathbf{\Pi}_y).$$

D'où l'expression (7.3.7) est prouvée, et peut s'écrire comme

$$\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y^* \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{U}''^* \\ \mathbf{U}''^T & \mathbf{U}'^* \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y.$$

Annexe 4 : Preuve du Résultat 7.4

En utilisant la décomposition en valeur propre de $\mathbf{R}_y = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^H$ et $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \sum_{l=1}^{2M} \tilde{\lambda}_l \tilde{\mathbf{u}}_l \tilde{\mathbf{u}}_l^H$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}_y &= \sum_{l=L+1}^{M} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^H, \ \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}} = \sum_{l=2L+1}^{2M} \tilde{\mathbf{u}}_l \tilde{\mathbf{u}}_l^H \\
\mathbf{R}_s^{\#} &= \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{\lambda_l - \sigma_n^2} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^H, \ \mathbf{R}_{\tilde{s}}^{\#} = \sum_{l=1}^{2L} \frac{1}{\tilde{\lambda}_l - \sigma_n^2} \tilde{\mathbf{u}}_l \tilde{\mathbf{u}}_l^H.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les deux matrices $\mathbf{C}_\Pi$ et $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ peuvent être décomposées respectivement dans les bases orthonormées $\{(k,l)|\mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l\}$ et $\{(k,l)|\tilde{\mathbf{u}}_k^* \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l\}$ de $\mathbb{C}^{M^2}$ et $\mathbb{C}^{(2M)^2}$ respectivement comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_\Pi &= \sum_{k,l \in \mathcal{L}} \lambda_{k,l} (\mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_k^T \otimes \mathbf{u}_l^H) && (7.5.20) \\
\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} &= \sum_{k,l \in \tilde{\mathcal{L}}} \tilde{\lambda}_{k,l} (\tilde{\mathbf{u}}_k^* \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l)(\tilde{\mathbf{u}}_k^T \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l^H + \tilde{\mathbf{u}}_l^H \mathbf{J} \otimes \tilde{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{J}), && (7.5.21)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}$ [resp. $\tilde{\mathcal{L}}$] est l'ensemble $\{(k,l)\ |1 \leq k \leq L < l \leq M \bigcup 1 \leq l \leq L < k \leq M\}$ [resp. $\{(k,l)\ |1 \leq k \leq 2L < l \leq 2M \cup 1 \leq l \leq 2L < k \leq 2M\}$] et les valeurs de $\lambda_{k,l} \neq 0$ [resp. $\tilde{\lambda}_{k,l} \neq 0$]. nous déduisons donc que $\text{Rang}(\mathbf{C}_\Pi) = \text{Dim}(\mathcal{L}) = 2L(M-L) < M^2$ et $\text{Rang}(\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}) = \text{Dim}(\tilde{\mathcal{L}}) = 2L(2M-2L) < 4M^2$. Par suite $\mathbf{C}_\Pi$ et $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ sont singulières.

Due à la structure de la matrice $\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}$, la démonstration de la singularité de cette matrice semble difficile. Mais grâce à la décomposition en valeur singulière des matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$, nous avons

$$\mathbf{U}' = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l' \mathbf{u}_l' \mathbf{u}_l'^H, \ \ \mathbf{U}'' = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l'' \check{\mathbf{u}}_l \hat{\mathbf{u}}_l^H,$$

et puisque $\text{Imag}(\mathbf{U}) = \text{Imag}(\mathbf{U}') = \text{Imag}(\mathbf{U}'') = \text{Imag}(\mathbf{A})$, ceci implique que les bases orthonormées $\{\mathbf{u}_1' \ldots, \mathbf{u}_L\}$, $\{\mathbf{u}_1' \ldots, \mathbf{u}_L'\}$, $\{\hat{\mathbf{u}}_1 \ldots, \hat{\mathbf{u}}_L\}$ et $\{\check{\mathbf{u}}_1 \ldots, \check{\mathbf{u}}_L\}$ engendrent le même sous espace $\text{Imag}(\mathbf{A})$. En remplaçant les expressions $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$ dans (7.3.7). Nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\text{Imag}(\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}) &= \text{Imag}\left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \\ \mathbf{0} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \end{matrix}, \ | \ 1 \leq k \leq L < l \leq M \bigcup 1 \leq l \leq L < k \leq M \right\} \\
\text{Ker}(\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}) &= \text{Imag}\left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \\ \mathbf{0} \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \end{matrix}, \ | \ 1 \leq k,l \leq L \bigcup L < k,l \leq M \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice $\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}$ est singulière.

Annexe 5 : Preuve du Résultat 7.5

Notons que ce résultat est une application directe des résultats 7.1 et 7.2 appliqués aux statistiques $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_y)$, $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_y, \mathbf{\Pi}'_y)$ et $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})$. Puisque ces statistiques sont hermitiennes alors la seconde condition de (7.3.2) est vérifiée. Il nous reste à vérifier la première condition de (7.3.2).

A partir des relations (7.5.20) et (7.5.21), nous déduisons :

$$\text{Imag}(\mathbf{C}_\Pi(\boldsymbol{\theta})) = \text{Imag}\{\mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \ |k,l \in \mathcal{L}\} \ \text{ et } \ \text{Imag}(\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}(\boldsymbol{\theta})) = \text{Imag}\{\tilde{\mathbf{u}}_k^* \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l \ |k,l \in \tilde{\mathcal{L}}\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\mathbf{C}_\Pi) &= \text{Imag}\{\mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \mid 1 \leq k,l \leq L \bigcup L < k,l \leq M\} \\
\text{Ker}(\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}) &= \text{Imag}\{\tilde{\mathbf{u}}_k^* \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l \mid 1 \leq k,l \leq 2L \bigcup 2L < k,l \leq 2M\}.
\end{aligned}$$

Par suite pour démontrer la première condition de l'égalité (7.3.2) pour les deux statistiques $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$ et $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$, il suffit de vérifier que

$$\frac{d\text{vec}(\Pi_y(\boldsymbol{\alpha}))}{d\alpha_k} = \sum_{l=L+1}^{M} \left(\mathbf{u}_l^* \otimes \frac{d\mathbf{u}_l}{d\alpha_k} + \frac{d\mathbf{u}_l^*}{d\alpha_k} \otimes \mathbf{u}_l \right) \perp \text{Ker}(\mathbf{C}_\Pi) \tag{7.5.22}$$

$$\frac{d\text{vec}(\Pi_{\tilde{y}}(\boldsymbol{\alpha}))}{d\alpha_k} = \sum_{l=2L+1}^{M} \left(\tilde{\mathbf{u}}_l^* \otimes \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_l}{d\alpha_k} + \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_l^*}{d\alpha_k} \otimes \tilde{\mathbf{u}}_l \right) \perp \text{Ker}(\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}), \tag{7.5.23}$$

pour $k = 1, ..., L$. Puisque $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_M\}$ et $\{\tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_{2M}\}$ sont deux bases orthonormales respectivement de $\mathbb{C}^M$ et $\mathbb{C}^{2M}$. Par conséquent, les deux conditions (7.5.22) et (7.5.23) sont vérifiées après un calcul simple en utilisant $\frac{d\mathbf{u}_k^H}{d\alpha_k}\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^H \frac{d\mathbf{u}_k}{d\alpha_k} = 0$ et $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k^H}{d\alpha_k}\tilde{\mathbf{u}}_k + \tilde{\mathbf{u}}_k^H \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_k}{d\alpha_k} = 0$. Puisque $\mathrm{Ker}(\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}) = \mathrm{Imag}\left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_k^* \otimes \mathbf{u}_l \end{array} \mid 1 \leq k, l \leq L \bigcup L < k, l \leq M \right\}$ et par conséquent, $(\frac{d^T \mathrm{vec}(\Pi_y)}{d\theta_k}, \frac{d^T \mathrm{vec}(\Pi_y)}{d\theta_k})^T \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}})$. Par conséquent, la première condition de l'égalité (7.3.2) est aussi vérifiée pour la statistique $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$.

En prenant la démonstration du résultat 7.2 donné en annexe 2 où $\mathbf{C}_s^{\#}$ est remplacée par $\mathbf{W}_T$, un estimateur consistant de la matrice $\mathbf{C}_s^{\#}$ telle que $\mathbf{W}_T = \mathbf{C}_s^{\#} + o(\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$, l'expression (7.5.16) devient :

$$- \quad \frac{d\mathbf{s}^H(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} \mathbf{W}_T[\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)] - [\mathbf{s}_T - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_T)]^H \mathbf{W}_T \frac{d\mathbf{s}(\alpha)}{d\alpha_k}|_{\alpha=\boldsymbol{\theta}_T} = 0.$$

Nous adoptons le même calcul donné dans l'annexe 2, nous obtenons après simplification :

$$\left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S} + \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#*}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}^*\right) \delta\boldsymbol{\theta} + o(\delta\boldsymbol{\theta}_T) = \mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\delta\mathbf{s} + \mathcal{S}^T \mathbf{C}_s^{\#*}(\boldsymbol{\theta})\delta\mathbf{s}^* + o(\delta\mathbf{s}).$$

Et par conséquent, la matrice Jacobienne de l'application Alg(.) donnée par l'égalité (7.3.8) a pour expression $\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}} = \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1} \mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})$. D'où

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}} \mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{D}_s^{\mathrm{Alg}})^H = \left(\mathcal{S}^H \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{S}\right)^{-1},$$

puisque $\mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}_s(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}_s^{\#}(\boldsymbol{\theta})$.

Annexe 6 : Preuve de l'équivalence de la première condition donnée par (7.3.2) et [10, Assumption 3]

Notons $\mathbf{\Pi}_y$ et $\mathbf{\Pi}_{y,s} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_y$ le sous espace bruit et le sous espace signal qui remplacent respectivement le sous espace bruit $\mathbf{P}_n$ et le sous espace signal $\mathbf{P}_s$ introduits dans [10]. Avec ces notations, nous démontrons que la condition introduit dans [10, Assumption 3] est équivalente à la première condition donnée par (7.3.2) en utilisant par exemple la statistique $\mathbf{\Pi}_{y,T}$, bien que la démonstration reste valable en considérant d'autres statistiques construites à partir des projecteurs.

Puisque $\mathbf{\Pi}_y + \mathbf{\Pi}_{y,s} = \mathbf{I}$, nous obtenons

$$\mathbf{\Pi}_{y,s}\partial_k \mathbf{\Pi}_y = \partial_k \mathbf{\Pi}_y - \mathbf{\Pi}_y \partial_k \mathbf{\Pi}_y, \tag{7.5.24}$$

où $\partial_k \mathbf{\Pi}_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_k}$. En dérivant $\mathbf{\Pi}_y^2 = \mathbf{\Pi}_y$ par rapport à θ_k, on obtient $\mathbf{\Pi}_y \partial_k \mathbf{\Pi}_y = \frac{1}{2}\partial_k \mathbf{\Pi}_y$, et par conséquent, nous obtenons à partir de l'égalité (7.5.24)

$$\mathbf{\Pi}_{y,s}\partial_k \mathbf{\Pi}_y = \frac{1}{2}\partial_k \mathbf{\Pi}_y.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Pi}_{y,s}\dot{\mathbf{\Pi}}_y] &\stackrel{\text{def}}{=} [\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,s}\partial_1\mathbf{\Pi}_y),\ldots,\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,s}\partial_K\mathbf{\Pi}_y)] = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{\Pi}}_y] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[\text{vec}(\partial_1\mathbf{\Pi}_y),\ldots,\text{vec}(\partial_K\mathbf{\Pi}_y)]. \end{aligned} \tag{7.5.25}$$

En utilisant des propriétés algébriques (cf. chapitre 1), nous avons :

$$\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,s}\mathbf{\Pi}_{y,T}) = (\mathbf{I}\otimes\mathbf{\Pi}_{y,s})\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,T})(\mathbf{I}\otimes\mathbf{\Pi}_{y,s}),$$

et puisque la matrice de covariance asymptotique $\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$ donnée par (7.3.5) a la forme suivante :

$$\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,T}) = (\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{\Pi}_y) + (\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U}),$$

et comme $\mathbf{U}\mathbf{\Pi}_{y,s} = \mathbf{U}$, on obtient donc :

$$\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,s}\mathbf{\Pi}_{y,T}) = \text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,T}). \tag{7.5.26}$$

Nous déduisons à partir d'égalités (7.5.25) et (7.5.26) que la condition donnée par [10, Assumption 3] est devient :

$$\text{Imag}([\mathbf{\Pi}_{y,s}\dot{\mathbf{\Pi}}_y]) = \text{Imag}([\dot{\mathbf{\Pi}}_y]) \subset \text{Imag}(\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,s}\hat{\mathbf{\Pi}}_y)) = \text{Imag}(\text{Cov}(\mathbf{\Pi}_{y,T})),$$

qui est la première condition donnée par (7.3.2).

Annexe 7 : Preuve du Résultat 7.6

AMV basé sur $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$:
Puisque $\text{Ker}(\mathbf{R}_s^{\#}) = \text{Imag}(\mathbf{\Pi}_y)$, nous avons $\mathbf{U}\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O}$. Ceci implique les deux relations

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U})(\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{\Pi}_y)^H &= \mathbf{\Pi}_y^*\mathbf{U}^T\otimes\mathbf{U}\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O} \\ (\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U})^H(\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{\Pi}_y) &= \mathbf{\Pi}_y^*\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{U}\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O},\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire grâce aux relations (1.1.8) et (1.1.10) données par le chapitre 1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\Pi}^{\#} &= ((\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U}) + (\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{\Pi}_y))^{\#} = (\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U})^{\#} + (\mathbf{U}^*\otimes\mathbf{\Pi}_y)^{\#} = \mathbf{\Pi}^{\#*}_y\otimes\mathbf{U}^{\#} + \mathbf{U}^{\#*}\otimes\mathbf{\Pi}_y^{\#} \\ &= \mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{U}^{\#} + \mathbf{U}^{\#*}\otimes\mathbf{\Pi}_y = \frac{1}{\sigma_n^2}((\mathbf{\Pi}_y^*\otimes\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^H) + (\mathbf{A}^*\mathbf{H}^*\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{\Pi}_y)),\end{aligned}$$

où la dernière égalité est déduite à partir de l'égalité $\mathbf{U}^{\#} = \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{R}_s = \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H = \frac{1}{\sigma_n^2}\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^H$ avec $\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R}_x$. Grâce aux relations (1.1.5)

et (1.1.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \left[\left(\frac{\partial \mathrm{vec}^T(\mathbf{\Pi}_y^T)}{\partial \theta_k}\mathbf{C}_{\Pi}^{\#}\frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y)}{\partial \theta_l}\right)^{-1}\right]_{k,l} \\
&= \frac{1}{\sigma_n^2}\frac{\partial \mathrm{vec}^T(\mathbf{\Pi}_y^T)}{\partial \theta_k}((\mathbf{\Pi}_y^T \otimes \mathbf{AHA}^H) + (\mathbf{A}^*\mathbf{H}^*\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{\Pi}_y))\frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y)}{\partial \theta_l} \\
&= \frac{1}{\sigma_n^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_k}\mathbf{AHA}^H\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_l}\mathbf{\Pi}_y + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_l}\mathbf{AHA}^H\right) \\
&= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^H\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_l}\mathbf{AH}\right)\right].
\end{aligned}$$

Notons que $\mathbf{\Pi}_y\mathbf{A} = \mathbf{O}$ implique

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\partial \theta_i}\mathbf{A} + \mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_i} = \mathbf{O}, \quad i = k, l, \tag{7.5.27}$$

et nous obtenons

$$\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} = \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \mathbf{A}^H}{\partial \theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_l}\mathbf{H}\right)\right]. \tag{7.5.28}$$

Puisque chaque vecteur colonne $\mathbf{a}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_k)$ de $\mathbf{A}$ est paramétré par un paramètre scalaire réel θ_k, alors $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_l} = \mathbf{D}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T$. Par conséquent, l'expression donnée par (7.5.28) devient :

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi)}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathbf{e}_k^T\mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_y\mathbf{D}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T\mathbf{H}\mathbf{e}_k\right] \\
&= \left[\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{CG}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l}.
\end{aligned}$$

AMV basé sur $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}'_{y,T})$:
Nous obtenons grâce aux identités $\mathbf{U}\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}'\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O}$ et $\mathbf{U}''\mathbf{\Pi}_y = \mathbf{O}$ et après quelques manipulations algébriques, les deux relations :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U} & \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}'' \\ \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}''^H & \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{U}^* \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{U}''^* \otimes \mathbf{\Pi}_y \\ \mathbf{U}''^T \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{U}'^* \otimes \mathbf{\Pi}_y \end{pmatrix}^H &= \mathbf{O} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U} & \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}'' \\ \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}''^H & \mathbf{\Pi}_y^* \otimes \mathbf{U}' \end{pmatrix}^H\begin{pmatrix} \mathbf{U}^* \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{U}''^* \otimes \mathbf{\Pi}_y \\ \mathbf{U}''^T \otimes \mathbf{\Pi}_y & \mathbf{U}'^* \otimes \mathbf{\Pi}_y \end{pmatrix} &= \mathbf{O},
\end{aligned}$$

qui nous permettent d'écrire grâce aux relations (1.1.8), (1.1.10), (1.1.11) et (1.1.12) données par le chapitre 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\substack{\Pi \\ \Pi'}}^{\#} &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y^*\right\}\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\right)^{\#} + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{U}''^* \\ \mathbf{U}''^T & \mathbf{U}'^* \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Pi}_y\right)^{\#} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y^*\right\}\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{U}''^* \\ \mathbf{U}''^T & \mathbf{U}'^* \end{pmatrix}^{\#} \otimes \mathbf{\Pi}_y\right).
\end{aligned} \tag{7.5.29}$$

Notons que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} \end{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi}_{y,T})}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}\frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y)}{\partial \theta_i} \\ \mathbf{K}\frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y)}{\partial \theta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y^*)}{\partial \theta_i} \\ \frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y^*)}{\partial \theta_i} \end{pmatrix}, \quad i = k, l,$$

nous obtenons à partir de l'égalité (7.5.29), en utilisant les relations (1.1.5) et (1.1.6)

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= 2\Re\left[\frac{\partial \mathrm{vec}^T}{\partial \theta_k}\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y \\ \mathbf{\Pi}_y \end{pmatrix}^T \left(\left(\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#}\right)^T \otimes \mathbf{\Pi}_y\right) \frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_y, \mathbf{\Pi}_y)}{\partial \theta_l}\right] \\ &= 2\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \\ \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} & \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#}\right)\right]. \end{aligned}$$

A partir des définitions des matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$ données par le résultat 7.3, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix} = \sigma_n^2 \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{*\#} \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{*\#} \end{pmatrix} = \mathrm{Rang}\left(\mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix}\right),$$

le théorème [94, Th.5.9] s'applique et nous obtenons en utilisant l'égalité (1.1.11) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#} = \frac{1}{\sigma_n^2}\left(\mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix}\right)^{\#} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{*} \end{pmatrix}. \tag{7.5.30}$$

Maintenant nous proposons de démontrer que :

$$\left(\mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix}\right)^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s' \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}. \tag{7.5.31}$$

En posant $\mathcal{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix}$ et $\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s' \end{pmatrix}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}$, montrons que $\mathcal{X}$ est le pseudo inverse de $\mathcal{A}$, c'est à dire qu'il vérifie les quatre axiomes de la définition du pseudo inverse [94, Def.5.1].

En effet, puisque $\mathbf{R}_s^{\#}$ et $\mathbf{R}_s'^{\#}$ vérifient ces quatre axiomes, nous obtenons après quelques manipulations algébriques :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A} &= \mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}_s'\mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\tilde{y}}\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \\ \mathcal{X}\mathcal{A}\mathcal{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s\mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'\mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}_s' \end{pmatrix}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s' \end{pmatrix}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \mathcal{X} \\ (\mathcal{X}\mathcal{A})^H &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s\mathbf{R}_s^{\#} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'\mathbf{R}_s'^{\#} \end{pmatrix} = \mathcal{X}\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que $(\mathcal{A}\mathcal{X})^H = \mathcal{A}\mathcal{X}$. Pour cela, puisque $\mathrm{Imag}(\mathbf{R}'_s) = \mathrm{Imag}(\mathbf{R}_s)$ implique

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s'^{*}\mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s &= \mathbf{R}_s'^{*} \\ \mathbf{R}_s^{*}\mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s &= \mathbf{R}_s^{*}, \end{aligned} \tag{7.5.32}$$

cela donne en décomposant $\mathbf{R}_{\tilde{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{R}'_s \\ \mathbf{R}_s'^{*} & \mathbf{R}_s^{*} \end{pmatrix} + \sigma_n^2\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{s}} + \sigma_n^2\mathbf{I}$:

$$\mathbf{R}_{\tilde{s}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s\mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{R}'_s\mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \\ \mathbf{R}_s'^{*}\mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{R}_s^{*}\mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\tilde{s}}. \tag{7.5.33}$$

Par suite après quelques manipulations algébriques élémentaires utilisant $\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \sigma_n^{-2}\mathbf{I} - \sigma_n^{-2}\mathbf{R}_{\tilde{s}}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}$ et l'égalité (7.5.33), nous obtenons :

$$\mathbf{R}_{\tilde{y}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} + \left(\mathbf{R}_{\tilde{s}} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{s}} \right) \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}$$

et grâce à cette égalité $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s\mathbf{R}_s & \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s\mathbf{R}'_s \\ \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s\mathbf{R}_s'^{*} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s\mathbf{R}_s^{*} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\tilde{s}}$ obtenues en utilisant [60, p. 33, Th.5, rel. (vii)] et (7.5.32), nous obtenons :

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathbf{R}_{\tilde{y}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s^{\#}\mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{\#}\mathbf{R}'_s \end{pmatrix},$$

et donc $(\mathcal{A}\mathcal{X})^H = \mathcal{A}\mathcal{X}$ est démontré.
D'où à partir de (7.5.30) et (7.5.31), nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}'_s \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_s'^{*} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}\mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{*}\mathbf{R}_x'^{*}\mathbf{A}^H \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{*}\mathbf{R}_x'^{*} \end{pmatrix} \\ &\qquad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^H \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^H \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \\ \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} & \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{U}'' \\ \mathbf{U}''^H & \mathbf{U}' \end{pmatrix}^{\#}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \\ \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} & \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}} \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \begin{pmatrix} \mathbf{A}^H & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^H \end{pmatrix}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}^H\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \\ \mathbf{A}^H\frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_k} \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}_y \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l}\mathbf{A} & \frac{\partial \mathbf{\Pi}_y}{\theta_l}\mathbf{A} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}}\right)\right].
\end{aligned}$$

En appliquant l'identité (7.5.27), nous obtenons :

$$\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} = \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l} & \frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l} \\ \frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l} & \frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}}\right)\right].$$

Puisque $\mathbf{R}_{\tilde{y}}$ est structurée, donc $\tilde{\mathcal{H}}$ est aussi structurée. En exploitant la structure de $\tilde{\mathcal{H}}$ et après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} = \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l}[\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}\right)\right]. \tag{7.5.34}$$

Puisque chaque vecteur colonne $\mathbf{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\theta_k)$ de $\mathbf{A}$ est paramétré par un paramètre scalaire réel θ_k, alors $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_l} = \mathbf{D}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l^T$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left[\left(\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\Pi,\Pi')}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \mathbf{A}^H}{\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial \mathbf{A}}{\theta_l}[\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{e}_k^T\mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_y\mathbf{D}\mathbf{e}_l.\mathbf{e}_l^T[\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}'_x\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}\mathbf{e}_k\right)\right] \\
&= \left[\left(\mathbf{CRB}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{NCG}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l}.
\end{aligned}$$

AMV basé sur $\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$:
Nous avons vu dans le chapitre 4 que l'expression de la matrice hermitienne $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}$ peut s'écrire comme $\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}} = \frac{1}{2}\mathbf{LCL}$ avec $\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^* \otimes \tilde{\mathbf{U}}) + (\tilde{\mathbf{U}}^* \otimes \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})$ et $\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J}\otimes\mathbf{J})$ satisfait $\mathbf{L}^2 = 2\mathbf{L}$, et par conséquent une expression simple de la borne AMV peut être obtenue en minimisant :

$$\mathbf{C}^{\mathrm{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\mathbf{D}\mathcal{S}=\mathbf{I}} \mathbf{D}\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}\mathbf{D}^H = \frac{1}{2}\min_{2\mathbf{D}\mathcal{S}=\mathbf{I}} \mathbf{DLCLD}^H. \tag{7.5.35}$$

Puisque $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ est hermitienne structurée (4.5.5), alors $\mathbf{J}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\mathbf{J} = \mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^T$, de plus en appliquant l'égalité (1.1.5), nous avons $\mathbf{L}\mathcal{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{J}\otimes\mathbf{J}))\frac{d\mathrm{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}})}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{S} + \mathbf{K}\mathrm{vec}(\mathbf{J}\frac{d\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}}{d\boldsymbol{\theta}}\mathbf{J}) =$

$\mathcal{S} + \mathbf{K}\text{vec}(\frac{d\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}^T}{d\boldsymbol{\theta}}) = 2\mathcal{S}$, et les contraintes $\mathbf{D}\mathcal{S} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{DL}\mathcal{S} = 2\mathbf{I}$ sont équivalentes. Par conséquent, le problème d'optimisation (7.5.35) devient :

$$\mathbf{C}^{\text{AMV}(\tilde{\mathbf{\Pi}})}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \min_{\frac{\mathbf{DL}}{2}\mathcal{S}=\mathbf{I}} \left(\frac{\mathbf{DL}}{2}\right) \mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{DL}}{2}\right)^H .$$

Puisque $\text{Imag}(\mathcal{S}) \subset \text{Imag}(\mathbf{C}_{\tilde{\Pi}}) \subset \text{Imag}(\mathbf{C})$ et en vertu de la preuve donnée dans l'annexe 1 en remplaçant respectivement dans (7.5.15), $\mathbf{D}$ et $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ par $\frac{\mathbf{DL}}{2}$ et $2\mathbf{C}$, nous obtenons $\mathbf{C}^{\text{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta}) = 2\left(\mathcal{S}^H\mathbf{C}^{\#}\mathcal{S}\right)^{-1}$.

Pour démontrer le résultat 7.6 avec la statistique $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T})$, notons que $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_{\Pi}$ sont structurées de la même façon. Donc toutes les étapes de la démonstration du résultat 7.6 avec la statistique $\text{vec}(\mathbf{\Pi}_{y,T})$ restent valables telle que dans l'égalité (7.5.28), $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Pi}_y$ et $\mathbf{H}$ sont remplacées respectivement par les matrices suivantes structurées comme nous avons vu dans le chapitre 4, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}$ et $\tilde{\mathbf{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}$. Par conséquent,

$$\left[\left(\mathbf{C}^{\text{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\text{Tr}\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}^H}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial\theta_l}\tilde{\mathbf{H}}\right)\right]. \tag{7.5.36}$$

Puisque toutes les matrices données par la définition de $\tilde{\mathbf{H}}$ sont structurées sous la forme $\begin{pmatrix} (\square) & (\times) \\ (\times)^* & (\square)^* \end{pmatrix}$, donc $\tilde{\mathbf{H}}$ est également structurée comme $\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2^* & \mathbf{H}_1^* \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H, \mathbf{R}_x'\mathbf{A}^T]\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R}_x \\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}_x'^* \end{bmatrix}$. Alors

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}^H}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_{\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}}{\partial\theta_l}\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathbf{A}^H}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\theta_l}\mathbf{H}_1 & (\times) \\ (\times)^* & \frac{\partial\mathbf{A}^T}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_y^*\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial\theta_l}\mathbf{H}_1^* \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \left[\left(\mathbf{C}^{\text{AMV}(\tilde{\Pi})}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\text{Tr}\left(\frac{\partial\mathbf{A}^H}{\partial\theta_k}\mathbf{\Pi}_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\theta_l}\mathbf{H}_1\right)\right] \\ &= \frac{2}{\sigma_n^2}\Re\left[\mathbf{e}_k^T\mathbf{D}^H\mathbf{\Pi}_y\mathbf{D}\mathbf{e}_l.\mathbf{e}_l^T\mathbf{H}_1\mathbf{e}_k\right] \\ &= \left[\left(\mathbf{CRB}_{\text{U}}^{\text{NCG}}(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\right]_{k,l}. \end{aligned} \tag{7.5.37}$$

Annexe 8 : Preuve du Résultat 7.7

Les étapes de la démonstration de l'expression (7.5.28) démontrée dans l'annexe 7, dans le cas particulier d'estimation de DOA de signaux complexes circulaires restent valables dans ce cas du modèle général. Par conséquent, l'expression de la borne AMV basée sur $\mathbf{\Pi}_{y,T}$ est prouvée en appliquant la propriété donnée par l'égalité (1.1.6).

Pour obtenir la CRB gaussienne complexe circulaire associée, nous suivons la preuve donnée

dans [106] où l'expression de la CRB du paramètre de DOA seul est dérivée directement à partir de la formule de Slepian-Bangs. Toutes les étapes de cette preuve peuvent être appliquées où l'égalité [106, rel. (16)] est remplacée par $\frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{R}_x\frac{\partial \mathbf{A}^H}{\partial \theta_k}$ et où [106, rel. (18)] devient $\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_y^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{R}_x\frac{\partial \mathbf{A}^H}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_y^{-1/2}$. Par conséquent, [106, rel. (30)] devient (7.4.9) grâce à [106, rel. (31)] et à l'égalité (1.1.6).

De façon similaire, l'expression (7.5.34) prouvée dans l'annexe 7 dans le cas particulier d'estimation de DOA de signaux complexes non circulaires reste valable dans ce cas du modèle général. Par conséquent, l'expression (7.4.10) de la borne AMV basée sur $\mathbf{\Pi}_{\tilde{y},T}$ ou sur $(\mathbf{\Pi}_{y,T}, \mathbf{\Pi'}_{y,T})$ est obtenue en appliquant la propriété donnée par l'égalité (1.1.6).
Pour obtenir l'expression de la CRB associée gaussienne complexe non circulaire, nous suivons la preuve donnée dans le chapitre 5 (cf. annexe 2) où l'expression de la CRB du paramètre de DOA seul est dérivée directement à partir de la formule générale étendue de Slepian-Bangs. Les étapes de cette preuve peuvent être appliquées ici où l'égalité (5.8.46) est remplacée par $\frac{\partial \mathbf{R}_{\tilde{y}}}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{A}}^H + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}^H}{\partial \theta_k}$ et où (5.8.47) devient $\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{\tilde{x}}\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}^H}{\partial \theta_k}\mathbf{R}_{\tilde{y}}^{-1/2}$. Par conséquent, l'inverse de l'expression (5.8.48) devient (7.4.10) grâce à l'égalité (1.1.6).

Chapitre 8

Conclusions et Perspectives

Bilan

Ce rapport a été consacré à l'estimation de DOA de signaux sources bandes étroites non circulaires d'ordre deux gaussiens ou non, affectés par un bruit gaussien complexe circulaire en considérant des algorithmes exploitant les deux matrices de covariance, en étudiant leurs performances statistiques asymptotiques et en exhibant des bornes de performance de référence.

Dans le cas de signaux sources non circulaires, non corrélés de non circularité maximale (cas 1) ou corrélés ou non de non circularité non maximale (cas 2), nous avons proposé des algorithmes de type sous espace de recherche monodimensionnelle du second ordre. Les performances asymptotiques de ces algorithmes sont analysées en adoptant une méthodologie générale d'étude de performances statistiques de tout algorithme sous espace du second ordre, en démontrant des expressions explicites des matrices de covariance asymptotiques des estimés de projecteurs orthogonaux. Ainsi grâce à une approche fonctionnelle des expressions explicites des matrices de covariance asymptotiques des DOA estimées sont obtenues alors que les études de performances précédentes n'avaient été menées que par simulations.

- Dans le cas de sources non corrélées complexes non circulaires des taux de non circularité maximale (cas 1), un gain important en terme de performance d'estimation et de résolution est apporté par les algorithmes sous espaces non circulaires comparés aux algorithmes sous espaces classiques basés seulement sur la première matrice de covariance. Nous avons démontré de plus que dans le cas d'une seule source non circulaire, les algorithmes présentés sont asymptotiquement efficaces (au sens de la borne AMV du second ordre). Cependant pour deux sources, en comparant la variance asymptotique des DOA associées à ces algorithmes avec la borne AMV construite à partir des deux matrices de covariances, l'efficacité asymptotique de ces algorithmes décroît pour des faibles valeurs de SNR, des séparations angulaires et des séparations de phase de non circularité.
- Dans le cas de sources corrélées ou non de taux de non circularité non maximale (cas

2), nous avons démontré une expression de la matrice de covariance asymptotique des DOA estimées associée à l'algorithme MUSIC pondéré que nous avons proposé. Les performances de cet algorithme n'améliorent celles de l'algorithme MUSIC standard que dans le cas de sources non corrélées (au sens réel) de circularité quelconque pour des faibles valeurs de séparation angulaire et de SNR où son efficacité (au sens de la borne AMV du second ordre) décroît dans ces circonstances. Dans les autres situations, les performances de cet algorithme MUSIC pondéré peuvent être plus mauvaises que celles de l'algorithme MUSIC standard. Dans le cas particulier d'une seule source gaussienne de non circularité quelconque, nous avons démontré que l'algorithme sous espace pondéré est asymptotiquement efficace (au sens de la CRB). En conséquence, aucun algorithme de type sous espace ne semble efficace (au sens AMV du second ordre) dans ce cas général. Seules paraissent disponibles des algorithmes de recherche multidimensionnelle tels que des algorithmes de type COMET issus de l'approche AMV ou des algorithmes du MV.

Grâce à une approche fonctionnelle, nous avons également démontré différentes propriétés asymptotiques de robustesse, telles que les performances asymptotiques de tout algorithme du second ordre basé sur la première matrice de covariance sont identiques à celles du cas d'observations gaussiennes complexes circulaires. De plus, les performances d'algorithmes sous espaces basés sur la matrice de covariance étendue dépendent uniquement de moments d'ordre 2 des sources.

Après avoir étendu la formule circulaire de Slepian-Bangs à des distributions gaussiennes non circulaires, nous avons démontré que l'estimateur du MV est insensible à la structure de la matrice de covariance du vecteur étendu de sources. En conséquence, des expressions analytiques explicites des CRB du paramètre de DOA seul affectés par différents modèles de bruits sont calculées d'une façon directe (grâce à la formule de Slepian-Bangs) ou indirecte (grâce à des calculs de perturbations de la fonction log-vraisemblance). Ces bornes sont analysées et comparées analytiquement avec des CRB gaussiennes circulaires conventionnelles ainsi qu'avec la CRB déterministe dans le cas d'une seule source et dans le cas de plusieurs sources. Nous avons observé un écart important entre les CRB gaussienne non circulaire et circulaire pour des faibles valeurs de SNR, de séparation angulaire et de séparation de phase de non circularité. Dans le cas de signaux sources indépendants affectés par un bruit blanc uniforme ou blanc non uniforme, nous avons démontré que les CRB gaussiennes circulaires et non circulaires sont équivalentes à la CRB déterministe quand le SNR tend vers l'infini.

Dans le cas des signaux sources discrets BPSK, MSK et QPSK, nous avons calculé des expressions analytiques explicites de la CRB de la DOA d'une seule source affectée par un bruit additif blanc uniforme ou blanc non uniforme telles que ces expressions analytiques sont très similaires. De plus, les CRB associées aux modulations BPSK et MSK [resp. QPSK] sont presque identiques aux CRB associées à des distributions complexes gaussiennes non circulaires [resp. circulaires] et égales pour des grandes et faibles valeurs de SNR dans le cas

d'une seule source.

Pour plusieurs sources indépendantes, nous avons calculé des expressions analytiques des CRB du paramètre de DOA seul pour des valeurs de SNR élevées, nous constatons que la CRB de la DOA d'une source ne dépend pas des paramètres de l'autre source contrairement au cas des sources gaussiennes, ce qui explique le comportement du seuil de résolution de SNR qui varie en $(\Delta\theta)^{-2}$ au lieu de $(\Delta\theta)^{-4}$ pour des sources gaussiennes. De plus, la CRB sous la distribution BPSK est très largement inférieure à la CRB complexe non circulaire, sauf pour des grandes valeurs de séparation angulaire et d'écart de phase de non circularité.

Des résultats asymptotiques classiques sur l'estimateur AMV sont étendus dans le cas où la première matrice de covariance asymptotique de la statistique est singulière. Ils sont appliqués à plusieurs statistiques associées à des estimées des projecteurs orthogonaux. Dans le cas gaussien circulaire ou non circulaire et en absence de connaissances a priori supplémentaires sur les signaux sources, nous avons démontré grâce à des outils algébriques que ces bornes AMV sont égales à la CRB stochastique. Ces résultats sont ensuite étendus au cas de paramètres de DOA multiples par source. En conséquence, il existe toujours des estimateurs AMV du second ordre de recherche multidimensionnelle d'estimation de DOA dans le contexte gaussien qui sont asymptotiquement efficaces (au sens de la CRB). Nous avons également étendu ces résultats au cas de modèles paramétriques plus généraux $\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t$ en supposant que les signaux $\mathbf{x}_t$ sont complexes circulaires ou non, $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{n}_t$ sont indépendants, $(\mathbf{n}_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont non corrélés, $\mathbf{n}_t$ gaussien circulaire avec $\mathrm{E}(\mathbf{n}_t\mathbf{n}_t^H) = \sigma_n^2\mathbf{I}$ et le paramètre Θ identifiable à partir de projecteurs orthogonaux. Nous avons illustré cette borne AMV dans le cas d'estimation de réponses impulsionnelles du canal SISO.

Perspectives

Nous identifions pour l'instant plusieurs prolongements possibles de ce travail de thèse :

- Il est admit dans la littérature que la modulation GMSK présente une non circularité du second ordre après prétraitement de dérotation. Il serait intéressant de reprendre l'ensemble des modulations numériques de type CPM et modulations linéaires décalées et d'examiner quel prétraitement simple de dérotation et quel échantillonage permet de créer de la non circularité d'ordre deux.
- Dans ce document nous avons supposé que les paramètres de notre modèle sont identifiables à partir des deux matrices de covariance. Il serait intéressant de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes d'identifiabilité en s'appuyant sur des travaux existant dans le cas de signaux sources gaussiens circulaires (cf. par exemple, [8, 119, 118, 43, 2]), qui montrent que ces conditions d'identifiabilité dépendent de la connaissance a priori sur les signaux sources et sur la géométrie de l'antenne.
- Dans l'analyse des performances asymptotiques, nous avons démontré que les algo-

rithmes MUSIC et root-MUSIC vérifient la même équation de perturbation, Il reste à étudier les conditions dans lesquelles que cette propriété peut se généraliser à des "spectres" plus généraux.

- Les résultats standards (cf. par exemple, [47, 76, 55, 27]) sur le pouvoir de résolution de deux sources proches montrent que le seuil de résolution de SNR dépend de la séparation angulaire, du nombre de capteurs et du nombre d'observations. Dans ce document, nous avons vu que les performances asymptotiques d'algorithmes d'estimation du paramètre de DOA dépendent en plus de ces paramètres de l'écart de phase de non circularité, il serait intéressant d'examiner l'influence de l'écart de phase de non circularité sur le pouvoir de résolution de deux sources proches non circulaires, en calculant un seuil de résolution de SNR à la fois pour les algorithmes sous espaces que nous avons proposés et pour l'estimateur du MV.
- Pour évaluer l'efficacité d'estimateurs du second ordre sous diverses connaissances a priori sur les signaux sources, nous avons utilisé la borne AMV dont l'expression est difficile à analyser. Le calcul d'une expression interprétable de la CRB stochastique ainsi que d'un algorithme qui l'atteint sous les conditions a priori que les signaux sources gaussiens sont non corrélés ou non corrélés de taux de non circularité maximale semble intéressant en se servant des travaux publiés dans [115, page 958].
- Dans le cas de signaux sources non circulaires gaussiens ou non, nous avons démontré que les performances asymptotiques d'algorithmes sous espaces du second ordre construits à partir de la matrice de covariance du modèle étendu ne dépendent que des moments d'ordre 2. Cependant, les signaux non circulaires, non gaussiens contiennent des informations dans leurs moments non circulaires d'ordres supérieurs. Cette information n'est pas exploitée d'une façon optimale par les algorithmes conventionnels de type sous espace d'estimation de DOA construits en utilisant tous les cumulants spatiaux circulaires d'ordre quatre (cf. par exemple [18, 81, 79, 70, 110, 11, 12]). Il serait intéressant de trouver un algorithme d'estimation de DOA qui exploite d'une façon optimale des propriétés statistiques de signaux non circulaires d'ordre 4, et d'étendre notre méthodologie d'analyse de performance d'algorithmes du second ordre non circulaires à l'étude de performance d'algorithmes d'estimation de DOA de ces algorithmes. Il serait aussi intéressant de comparer leurs performances asymptotiques aux algorithmes classiques, en particulier il serait utile de mettre l'accent sur le gain en résolution de deux sources proches.

Bibliographie

[1] K. Abed Meraim, J.F. Cardoso, A.Y. Gorokhov, P. Loubaton and E. Moulines, "On subspace methods for blind identification of single-input multiple-ouput FIR systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 42-55, January 1997.

[2] Y.I. Abramovich, N.K. Spencer and A.Y. Gorokhov, "Resolving manifold ambiguities in direction-of-arrival estimation for nonuniform linear antenna arrays," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 10, pp. 2629-2643, October 1999.

[3] N. S. Alagha, "Cramer-Rao bounds for SNR estimates for BPSK and QPSK modulated signals," *IEEE Communications letters*, vol. 5, no. 1, pp. 10-12, January 2001.

[4] P.O. Amblard, M. Gaeta and J.L. Lacoume, "Statistic for complex variables and signals-Part I : variables," *Signal Processing*, vol. 53, no. 1, pp. 1-13, August 1996.

[5] W.J. Bangs "Array processing with generalized beamformers," Ph. D. thesis Yale University, New Haven, CT, 1971.

[6] A.J. Barabell, "Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms," *Proceedings ICASSP, Boston*, pp. 336-339, March 1983.

[7] B.A. Bjerke, J.G. Proakis, M.K. Lee and Z. Zvonar, "A comparison of decision feedback equalization and data directed estimation techniques for the GSM system," *IEEE International Conference on Universal Personal Communications*, vol. 1, pp. 84-88, October 1997.

[8] Y. Bresler and A. Macovski, "On the number of signals resolvable by a uniform linear array," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 6, pp. 1361-1376, December 1986.

[9] S. Buzzi, M. Lops and A.M. Tulino, "A new family of MMSE multiuser receivers for interference suppression in DS/CDMA systems employing BPSK modulation," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 154-167, January 2001.

[10] J.F. Cardoso and E. Moulines, "Invariance of subspace based estimator," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 9, pp. 2495-2505, September 2000.

[11] J.F. Cardoso, "Localisation et identification par quadricovariance," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 5, June 1990.

[12] J.F. Cardoso and E. Moulines, " Asymptotic performance analysis of direction-finding algorithms based on fourth-order cumulants," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.43, no. 1, pp. 214-224, January 1995.

[13] E. de Carvalho, J. Cioffi and D. Slock, "Cramer-Rao bounds for Blind Multichannel Estimation," *IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 2, pp. 1036-1040, December 2000.

[14] P. Ciblat, P. Loubaton, E. Serpedin and G. Giannakis, "Performance analysis of blind carrier frequency offset estimators for non-circular transmissions through frequency-selective channels," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 1, pp. 130-140, January 2001.

[15] P. Chargé, Y. Wang and J. Saillard, "A non-circular sources direction finding method using polynomial rooting," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 1765-1770, August 2001.

[16] P. Chargé, Y. Wang and J. Saillard, "Exploitation de la non-circularité dans les systèmes de télécommunications : application à la localisation de sources," *Journées d'étude SEE, Antennes non standard : techniques et traitements, Paris*, pp. 131-135, Mars 2001.

[17] P. Chevalier and F. Pipon, "New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK, and GMSK signals corrupted by noncircular interferences-application to SAIC," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 3, pp. 870-883, March 2006.

[18] P. Chevalier and A. Férréol, "On virtual array concept for the fourth-order direction finding problem," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2592-2595, September 1999.

[19] W. Cowley, "Phase and frequency estimation for PSK packets : Bounds and algorithms," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 44, no. 1, pp. 1-3, January 1996.

[20] H. Cox, "Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors," *Journal of the Acoustics Society of America*, vol.54, no.3, pp. 771-785, September 1973.

[21] J.P. Delmas, "Asymptotic performance of second-order algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 1, pp. 49-57, January 2002.

[22] J.P. Delmas, "Asymptotically minimum variance second-order estimation for non-circular signals with application to DOA estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 5, pp. 1235-1241, May 2004.

[23] J.P. Delmas, P. Comon and Y. Meurisse, "Identifiability of BPSK, MSK and QPSK FIR SISO channels from modified second-order statistics," workshop on Signal Processing for Wireless Communications (SPAWC), Nice, July 2006.

[24] J.P. Delmas, P. Comon and Y. Meurisse, "Use limit of the alphabet diversities for FIR SISO channels," en préparation pour *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006.

[25] Z. Ding and G. Li, "Single-channel blind equalization for GSM cellular systems," *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1493-1505, October 1998.

[26] P. Forster, P. Larzabal and E. Boyer, "Threshold performance analysis of maximum likelihood DOA estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 11, pp. 3183-3191, November 2004.

[27] P. Forster and E. Villier, "Simplified formulas for performance analysis of MUSIC and min norm," *OCEANS Conference Proceedings*, vol.3, pp. 1486-1490, September 1998.

[28] P. Forster and E. Villier, "*Performances asymptotiques des methodes HR*," éditeur S. Marcos, les méthodes à haute résolution. HERMES, 1998.

[29] B. Friedlander and B. Porat, "Asymptotically optimal estimation of MA and ARMA parameters of non-gaussian processes from high-order moments," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 1, pp. 27-35, January 1990.

[30] B. Friedlander and A.J. Weiss, "Direction finding using noise covariance modeling," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 7, pp. 1557-1567, July 1995.

[31] J.Galy, "Antenne adaptative : du second ordre aux ordres supérieurs, applications aux signaux de télécommunications," Toulouse, Ph.Dissertation, 1998.

[32] A.B. Gershman, P. Stoica, M. Pesavento and E.G. Larsson, "Stochastic Cramer-Rao bound for direction estimation in unknown noise fields," *IEE Proceeding Radar Sonar Navigation*, vol. 149, no. 1, pp. 2-8, February 2002.

[33] H. Gerstacker, R. Schober and A. Lampe, "Receivers with widely linear processing for frequency-selective channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 9, pp. 1512-1523, September 2003.

[34] L.C. Godara, "Application of antenna arrays to mobile communications, Part II : beamforming and direction of arrival considerations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, pp. 1193-1245, August 1997.

[35] B. Göransson and B. Ottersten, "Direction estimation in partially unknown noise fields," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 9, pp. 2375-2385, September 1999.

[36] P.Gounon, C.Adnet and J.Galy, "Localisation angulaire de signaux non circulaires," *Traitement du Signal*, no. 1, vol. 15, pp. 17-23, 1998.

[37] O. Grellier and P. Comon, "Blind separation and equalization of a channel with MSK inputs," *SPIE Conference, San Diego*, pp.26-34, July 1998.

[38] O. Grellier, P. Comon, B. Mourrain and P. Trebuchet, "Analytical blind channel identification," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 9, pp. 2196-2207, September 2002.

[39] M. Haardt and J.A. Nossek, "Unitary ESPRIT : How to obtain increased estimation accuracy with a reduced computational burden," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, pp. 1232-1242, May 1995.

[40] M. Haardt and F. Römer, "Enhancements of unitary esprit for non-circular sources," *Proceedings ICASSP, Montreal*, vol. 2, pp. 101-104, May 2004.

[41] R. Hamza and K. Buckley, "Resolution enhanced ESPRIT," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 3, pp. 688-691, March 1994.

[42] B.Hochwald and A. Nehorai, "Concentrated Cramer Rao bound expressions," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 2, pp. 363-371, March 1994.

[43] B. Hochwald and A. Nehorai, "Identifiability in array processing models with vector-sensor applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 1, pp. 83-95, January 1996.

[44] A.G. Jaffer, "Maximum likelihood direction finding of stochastic sources : a separable solution," *Proceedings ICASSP, New York*, pp. 2893-2896, April 1988.

[45] M. Jansson, B. Goransson and B. Ottersten, "A subspace method for direction of arrival estimation of uncorrelated emitter signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 945-956, April 1999.

[46] G.K. Kaleh, "Simple coherent receivers for partial response continuous phase modulation," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 7, no. 9, pp. 1427-1436, December 1989.

[47] M. Kaveh and A.J. Barabell, "The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise," *Proceedings ICASSP, Tokyo*, vol. 34, no. 2, pp. 331-341, April 1986.

[48] H. Krim and P. Forster, "Projections on unstructured subspaces," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.44, no. 10, pp. 2634-2637, October 1996.

[49] H. Krim and M. Vitberg, "Two decardes of Array Signal Processing" *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67-94, July 1996.

[50] H. Krim, P. Forster and J.G. Poakis, "Operator approach to performance analysis of root-MUSIC and root-min-norm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.40, no.7, pp. 1687-1696, July 1992.

[51] M. Kristensson, B.E. Ottersten and D.T.M. Slock, "Blind subspace identification of a BPSK communication channel," *Proceedings 30th Asilomar Conference on signals, Systems and computers*, Pacific Grove, pp. 828-832, November 1996.

[52] J.L. Lacoume, "Complex random variable and signals," *Traitement du Signal*, vol. 15, no. 6, pp. 535-544, 1998.

[53] P.A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulse," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 34, no. 2, pp. 150-160, February 1986.

[54] M. Lavielle, E. Moulines and J.F. Cardoso, "A maximum likelihood solution to DOA estimation for discrete sources," *Proceedings Seventh IEEE Workshop on Signal Processing, Quebec*, pp. 349-353, June 1994.

[55] H.B. Lee, "The Cramer-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 6, pp. 1508-1517, June 1992.

[56] H.B. Lee and M. Wengrovitz, "Statistical characterization of the MUSIC null spectrum" *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.39, no.6, pp. 1333-1347, June 1991.

[57] H.B. Lee and M. Wengrovitz, "Resolution threshold of Beamspace MUSIC for two closely spaced emitters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.38, no.9, pp. 1545-1559, September 1990.

[58] H.B. Lee and M. Wengrovitz, "Theoretical resolution-threshold curve for the MUSIC algorithm," *Proceedings ICASSP, Toronto*, vol.5, pp. 3313-3316, April 1991.

[59] A. Leshem and A.J. van der Veen, "Direction-of-Arrival estimation for constant modulus signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 47, no. 11, pp. 3125-3129, November 1999.

[60] J.R. Magnus and H. Neudecker,"*Matrix differential calculus with applications in statistic and econometrics*," John Wiley and Sons, 1999.

[61] A.L. Matveyev, A.B. Gershman and J.F. Böhme, "On the direction estimation Cramer-Rao bounds in the presence of uncorrelated unknown noise," *Circuits, Systems, Signal Processing*, vol. 18, pp. 1310-1324, July 2001.

[62] M. Moeneclaey, "On the true and modified Cramer-Rao bound for the estimation of a scalar parameter in the presence of nuisance parameters," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 11, pp. 1536-1544, November 1998.

[63] A. Monfort, "*Cours de statistique mathématique*," Troisième éditions, Economica, Paris.

[64] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso and S. Mayrargue, "Subspace mothods for the blind identification multichannel FIR filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 2, pp. 516-525, February 1996.

[65] F.D. Neeser and J.L. Massey, "Proper complex random processes with applications to information theory," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 4, pp. 1293-1302, July 1993.

[66] B. Ottersten and M. Viberg, "Analysis of subspace fitting based methods for sensor array processing," *Proceedings ICASSP, Glasgow*, vol. 4, pp. 2807-2810, May 1989.

[67] B. Ottersten, P. Stoica and R. Roy,"Covariance matching estimation techniques for array signal processing," *Digital Signal Processing*, vol. 8, pp. 185-210, 1998.

[68] B. Ottersten, M.Viberg and T. Kailath, "Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 5, pp. 1122-1135, May 1991.

[69] B. Otterstein, M. Viberg and T. Kailath, "Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 3, pp. 590-600, March 1992.

[70] R. Pan and C. Nikias, "Harmonic decomposition methods in cumulant domains [array processing]," *IEEE Transactions on Acoustics, Speechand Signal Processing*, vol. 4, pp. 2356-2359, April 1988.

[71] A. Paulraj, R. Roy and T. Kailath, "A subspace rotation approach to signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.74, no. 7, pp. 1044-1046, July 1986.

[72] M. Pesavento and A.B. Gershman, "Maximum-likelihood direction of arrival estimation in the presence of unknown nonuniform noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 7, pp.1310-1324, July 2001.

[73] B. Picinbono, "Second-order complex random vectors and normal distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 10, pp. 2637-2640, October 1996.

[74] B. Picinbono, "On circularity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3473-3482, December 1994.

[75] S.U. Pillai and B.H. Kwon, "Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol.37, pp. 8-15, January 1989.

[76] S.U. Pillai and B.H. Kwon, "Performance analysis of MUSIC-type high resolution estimators for direction finding in correlated and coherent scenes," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 8, pp. 1176-1189, August 1989.

[77] Z. Polgar and V. Bota, "Simplified demodulation methods of CPFSK signals. performances and digital implementation aspects," *Proceedings of the Symposium on Electronics and Telecommunications*, vol.1, pp. 92-97, November 2000.

[78] B. Porat and B. Friedlander, "Analysis of the asymptotic relative efficiency of the MUSIC algorithm," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 4, pp. 532-544, April 1988.

[79] B. Porat and B. Friedlander, "Direction finding algorithms based on higher order statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 9, pp. 2016-2024, September 1991.

[80] B. Porat and B. Friedlander, "Asymptotic accuracy of ARMA parameter estimation methods based on sample covariances," *Proceedings 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, 1985.

[81] B. Porat and B. Friedlander, "Performance analysis of parameter estimation algorithms based on high-order moments," *International journal of adaptive control and signal processing*, vol. 3, pp. 191-229, 1989.

[82] B. Porat,"*Digital processing of random signals theory and methods*," Prentice Hall 1994.

[83] J.G. Proakis, "*Digital communications*," Boston, McGraw-Hill, 1995

[84] B.D. Rao and K.V.S. Hari, "Performance analysis of ESPRIT and TAM in determining the direction of arrival of plane waves noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 37, no. 12, pp. 1990-1995, December 1989.

[85] B.D. Rao and K.V.S. Hari, "Weighted subspace methods and spatial smoothing : analysis and comparison," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 788-803, February 1993.

[86] B.D. Rao and K.V.S. Hari, "Performance analysis of root-MUSIC," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 12, pp. 1939-1949, December 1989.

[87] B.D. Rao and K.V.S. Hari, "Statistical performance analysis of the Minimum-Norm method," *Proc. IEE*, vol. 136, no. 3, pp. 125-134, June 1989.

[88] F. Rice, B. Cowley, B. Moran and M. Rice, "Cramer-Rao lower bounds for QAM phase and frequency estimation ," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 9, pp. 1582-1591, September 2001.

[89] C.R. Richmond, "Capon algorithm mean squared error threshold SNR prediction and probability of resolution," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 8, pp. 2748-2764, August 2005 .

[90] F. Roemer and M. Haardt, "Efficient 1-D and 2-D DOA estimation for non-circular sources with hesagonal shaped espar arrays," *Proceedings ICASSP, Toulouse*, May 2006.

[91] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, July 1989.

[92] B.M. Sadler, R.J. Kozick and T. Moore, "Bounds on bearing and symbol estimation with side information," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 29, no. 4, pp. 822-834, April 2001.

[93] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, pp. 276-280, March 1986.

[94] J.R. Schott, "*Matrix analysis for statistics*," John Wiley and Sons, 1980.

[95] P.J. Schreier and L.L. Scharf, "Second-order analysis of improper complex random vectors and processes," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 3, pp. 714-725, March 2003.

[96] K. Sharman and T. Durrani, "Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths," *Proceedings ICASSP, Florida*, pp. 1501-1504, April 1985.

[97] D. Slepian, "Estimation of signal parameters in the presence of noise," *in Transactions on IRE Prof. Grop Information Theory PG IT-3*, pp. 68-89, 1954.

[98] D.T. Slock and C.B. Papadias, "Blind fractionally-spaced equalization based on cyclostationarity," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 2, pp. 1286-1290, June 1994.

[99] S.T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramer-Rao bound," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597-1609, May 2005.

[100] H. Steendam and M. Moeneclaey, "Low SNR limit of the Cramer-Rao bound for estimating the carrier phase and frequency of a PAM, PSK or QAM waveform," *IEEE Communications letters*, vol. 5, no. 5, pp. 218-220, May 2001.

[101] P. Stoica, B. Friedlander and T. Söderström, "An approximate maximum approach to ARMA spectral estimation," *Proceeding Decision and control, Fort Lauderdale*, December 1985.

[102] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.

[103] P. Stoica and R. Moses, "*Introduction to spectral analysis*," Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[104] P. Stoica and A. Eriksson, "MUSIC estimation of real-valued sine-wave frequencies," *Signal Processing*, vol. 42, pp. 139-146, April 1995.

[105] P. Stoica and A. Nehorai, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound : further results and comparisons," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 12, pp. 2140-2150, December 1990.

[106] P. Stoica, A.G. Larsson and A.B. Gershman, "The stochastic CRB for array processing : a textbook derivation," *IEEE Signal Processing letters*, vol. 8, no. 5, pp. 148-150, May 2001.

[107] P. Stoica and A. Nehorai, "Performance study of conditional and unconditional direction of arrival estimation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 38, no. 10, pp. 1783-1795, October 1990.

[108] P. Stoica, A. Eriksson and T. Söderström, "Optimally weighted MUSIC for frequency estimation," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 16, no. 3, pp. 811-827, July 1995.

[109] P. Stoica, A. Jakobsson and J. Li, "Cissoid parameter estimation in the colored noise case : asymptotic Cramer-Rao bound, maximum likelihood, and nonlinear least-squares," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 8, pp. 2048-2059, August 1997.

[110] A. Swami and J. M. Mendel, "Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 5, pp. 1099-1111, May 1991.

[111] G.N. Tavales, L.M. Tavares and M.S. Piedade, "Improved Cramer-Rao lower bounds for phase and frequency estimation with M-PSK signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 12, pp. 2083-28087, December 2001.

[112] L.Tong, G. Xu and T. Kailath, " A new approach to blind identification and equalization of multipath channels," *In Proc. of the 25th Asilomar Conference on signals, Systems and computers*, pages 859-860, Pacific Grove, November 1991.

[113] H. Trigui and D.T.M. Slock, "Performance bounds for cochannel interference cancellation with in the current GSM standard," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 80, no. 7, pp. 1335-1346, July 2000.

[114] A.M. Tulino and S. Verdù, "Impoved linear receivers for BPSK-CDMA subject to fading," *Proceeding Allerton Conference Communication, Control, Computers,* Monticello, pp. 11-21, October 2000.

[115] H.L. Van Trees, "*Optimum array processing, part IV of detection, estimation, and modulation theory*," New York : Wiley, 2002.

[116] A. Van den Bos, "The multivariate complex normal distribution-a generalization," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 2, pp. 537-539, March 1995.

[117] M. Viberg and B. Ottersten, "Sensor array processing based on subspace fitting," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 5, pp. 1110-1121, May 1991.

[118] M. Wax, "On unique localization of constrained-signal sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 6, pp. 1542-1547, June 1992.

[119] M. Wax and J. Ziskind, "On unique localization of multiple sources by passive sensor arrays," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 996-1000, July 1989.

[120] A.J. Weiss and B. Friedlander, "On the Cramer-Rao bound for direction finding of correlated sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 495-499, January 1993.

[121] J. Wu and G.J. Saulnier, "A two-stage MSK-type detector for low-BT GMSK signals," *IEEE Journal on Vehicular Technology*, vol. 52, no. 4, pp. 1166-1173, July 2003.

[122] H. Ye and R.D. Degroat, "Maximum likelihood DOA estimation and asymptotic Cramer-Rao bounds for additive unknown colored noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 4, pp. 938-949, April 1995.

[123] A. Zoubir, P. Chargé and Y. Wang, "Non circular sources localization with ESPRIT," *6th European conference on Wireless Technology, Munich*, October 2003.